Analyse 6: mercredi 12 juin
Fonctions de plusieurs variables, exercices de synthèse

Exercice 1 *(Ccinp) On s'intéresse aux fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant*

$$(E) : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = u^2 + v. \end{cases}$ *et* $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.

1. *Montrer que f vérifie (E) si et seulement si $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) = 0$.*
2. *Déterminer les solutions de (E).*

Exercice 2 *(Ccinp): Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^{nx}}$.*

1. *Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$. On définit $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.*
2. *La fonction S est-elle de classe C^1 sur son ensemble de définition?*

Exercice 3 *(ccinp): Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ par $F(x,y) = \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$.*

Déterminer les fonctions φ pour lesquelles la fonction F vérifie l'équation $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 0 : (\mathcal{E})$.

Exercice 4 *(ccinp) Soit la suite réelle (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1}a_{n-1}$.*

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq a_n \leq n^2$.*
2. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.*
3. *En déduire une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par la somme S.de cette série entière et calculer $S(x)$.*

Exercice 5 *(ccinp) Déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2} : (E)$.(on posera $x(r,\theta) = r\cos(\theta)$ et $y(r,\theta) = r\sin(\theta)$.*

Exercice 6 *(Ccp 2017): Soit $a > 0$, $I = [-a,a]$ et $\varphi \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|\varphi(x)| \leq |Cx|$. Le but de l'exercice est de déterminer les fonction $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = 0$ et $\forall x \in I$, $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = \varphi(x)$.*

1. *Montrer que l'application $g : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est définie et continue sur I. Montrer que g est solution du problème.*
2. *En déduire l'ensemble des fonctions solutions.*

3. *Montrer que si φ est de classe C^1 alors φ est dérivable.*

Exercice 7 *(Mines ponts): Déterminer les extrémums de $(x,y) \to y\left(x^2 + (\ln(y))^2\right)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.*

Exercice 8 *(CCINP) On cherche une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue vérifiant la condition:*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt : (E)$$

1. *Résoudre, suivant la valeur du réel c l'équation $y'' - cy = 0$.*
2. *Soit f une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $F : (x,y) \mapsto \int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt$. Montrer que F est de classe C^2 et préciser $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.*
3. *Soit f une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue vérifiant (E). Déterminer $f(0)$. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f''(x) f(y) - f(x) f''(y)$. En déduire les solutions de (E).*

Exercice 9 *(ccinp) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + x^2 y + y^3$*

1. *Montrer que f admet un point critique mais n'y atteint pas d'extremum local.*
2. *Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Justifier que D est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.*
3. *Montrer qu'il existe (x_0, y_0) et(x_1, y_1) appartenant à D tel que $\forall (x,y) \in D,\ f(x_0,y_0) \leq f(x,y) \leq f(x_1,y_1)$. Donner la valeur de $f(x_0,y_0)$ et $f(x_1,y_1)$.*

Exercice 10 *(Mines ponts) Soit $a \in]0;1[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(ax)$.*

1. *Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Exprimer $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ à l'aide de f.*
2. *En déduire que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.*
3. *Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = g(ax)$.*

Exercice 11 *(ENS) Soit $I = [0,1]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $E = C^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions des fonctions de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par*

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

1. *Soit $\varphi : \left\{\begin{array}{c} E \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f'(0) \end{array}\right.$. Montrer que φ est une forme linéaire de E et qu'il existe une suite (f_n) de E vérifiant $\left\{\begin{array}{c} \|f_n\|_\infty = 1 \\ \text{la suite } (\varphi(f_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ a pour limite } +\infty \end{array}\right.$.*
2. *On se donne une forme linéaire $u : E \to \mathbb{R}$. On suppose que u est positive c'est-à-dire que pour toute fonction $f \in E$ positive on a $u(f) \geqslant 0$. On pose $e : x \to 1 \in E$.*
   (a) *Montrer que $\forall f \in E, |u(f)| \leqslant u(|f|)$.*
   (b) *Montrer qu'il existe une constante $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+$telle que $\forall f \in E, |u(f)| \leqslant C\|f\|_\infty$. En déduire que u est continue.*
   (c) *Calculer $\underset{f \in E, f \neq 0}{\mathrm{Sup}} \frac{|\mathrm{u(f)}|}{\|\mathrm{f}\|}$.*

Exercice 12 *(centrale) Soit la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = \frac{x\sin(y)-y\sin(x)}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$ *et* $f(0,0) = 0$.

1. f *est-elle continue sur* $\mathbb{R}^2$ *?*
2. *Calculer les dérivées partielles de* f *sur* $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. *La fonction* f *est-elle de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ *?*
3. *La fonction* f *admet-elle des dérivées partielles en* $(0,0)$ *? Si oui, les calculer.*
4. *La fonction* f *est-elle de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *?*

Exercice 13 *(Ccinp) Soit* $\alpha > 1$. *On pose* $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. *A quelle condition la série de terme général* R_n *est-elle convergente?*

Exercice 14 *(ccinp) Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation* $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0 : (E)$. *Existe-t-il des solutions non développables en série entière?*

Exercice 15 *(CCINP): Soit* E *l'ensemble des fonctions* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2 *vérifiant* $f(0) = 0$. *Pour* $f \in E$, *on pose* $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$
$N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ *et* $N_2(f) = \|f + f'\|_\infty$.

1. *Montrer que* N_1 *et* N_2 *sont des normes de* E.
2. *Soit* $f \in E$. *Montrer que pour tout* $x \in [0,1]$ $e^x f(x) = \int_0^x e^t (f(t) + f'(t))\, dt$.
3. *En déduire que les normes* N_1 *et* N_2 *sont équivalentes.*

Exercice 16 *(ccinp) On pose* $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$ *et* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$.

1. *Justifier l'existence de* S *et déterminer l'ensemble de définition de* f.
2. *Exprimer* $f(x)$, *pour* $x \in \left]-1,1\right[$ *au moyen des fonctions usuelles.*
3. *En déduire la valeur de* S.