Analyse 4: vendredi 7 juin
TH d'interversion

Exercice 1 *(Ccinp) Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière* $\sum\limits_{n\geq 0}(3n+1)^2x^n$

Solution de l'exercice:
$\sum a_nx^n$ et $\sum na_nx^n$ ont même rayon de convergence donc $\sum\limits_{n\geq 0}n^2x^n$ a même rayon de convergence que $\sum x^n$.
Si $a_n\sim_{n\to+\infty}b_n$ alors $\sum a_nx^n$ et $\sum b_nx^n$ ont même rayon de convergence et $(3n+1)^2\sim_{n\to+\infty}9n^2$ donc le rayon de convergence est $R=1$.
On a $(3n+1)^2=9n^2+6n+1=9n(n-1)+15n+1$ donc
$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(3n+1)^2x^n=9\sum\limits_{n=0}^{+\infty}n(n-1)x^n+15\sum\limits_{n=0}^{+\infty}nx^n+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=9\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^n+15\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^n+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$
soit $f(x)=9x^2\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}+15x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^n+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=9x^2g''(x)+15xg'(x)+g(x)$ avec $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$.

Exercice 2 *(ccinp)*

1. *Calculer* $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. *Donner le développement en série entière de la fonction arctangente.*
   Montrer que $\pi=8\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}$.
3. *Sans faire appel à une valeur approchée de* π*, déterminer avec la calculatatrice une valeur de* n *à partir de laquelle* $8\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2k+1}$ *est une approximation de* π *à* 10^{-10} *près.*

Solution de l'exercice: 1:Posons $a=\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$. On a $1=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{2a}{1-a^2}$ donc $a^2+2a-1=0$ donc $a=-1\pm\sqrt{2}$. Or $a>0$ car $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)>\tan(0)=0$ donc $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$
2: Si $|x|<1$, alors $\frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)x^{2n}$ donc par intégration du dse,
si $|x|<1$, $\arctan(x)-\arctan(0)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
On a $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$ et $\frac{\pi}{8}\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc
$\frac{\pi}{8}=\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}$. car $0<\sqrt{2}-1<2-1=1$.
3: La série $\sum u_n$ avec $u_n=\frac{8(-1)^n}{2n+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}$ est spéciale alternée: si $a_n=\frac{8\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}}{2n+1}$, on a $u_n=(-1)^na_n$ et $a_n>0$ donc $\sum u_n$ est alternée et $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+1}{2n+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+3}<1$ donc la suite $(|u_n|)$ est décroissante. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ et de limite nulle donc (majoration du reste dans CSSA)
$\left|\pi-8\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}\right|\leq\left|8\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+3}\right|=8\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+3}}{2n+3}=a_{n+1}$. La calculatrice montre que si $n=11$ et donc $\left|\pi-8\sum\limits_{n=0}^{11}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+1}\right|\leq 10^{-10}$.

Exercice 3 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $H_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i}$.*

1. *Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'intégrale généralisée $\int_0^1 u^i \ln(u)^2 \, du$ converge et vaut $\dfrac{2}{(i+1)^3}$.*

2. *Montrer que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \dfrac{H_n}{n^2}$ est convergente.*

3. *Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \dfrac{1}{k(n+k)}$ et a pour somme $\dfrac{H_n}{n}$.*

4. *Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 x^{n-1} \ln(1-x) \, dx$ converge.*

5. *Montrer que $\int_0^1 x^{n-1} \ln(1-x) \, dx = -\dfrac{H_n}{n}$.*

6. *En déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{H_n}{n^2} = \int_0^1 \dfrac{\ln(1-x)^2}{x} dx = 2 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^3}$.*

Solution de l'exercice:

1: Effectuons sous réserve de convergence deux IPP

$\int_0^1 u^i \ln(u)^2 \, du = \left[\dfrac{u^{i+1}}{i+1} \ln^2(u) \right]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{u^i}{i+1} 2 \ln(u) \, du = - \int_0^1 \dfrac{u^i}{i+1} 2 \ln(u) \, du$

$= -2 \left(\left[\dfrac{u^{i+1}}{(i+1)^2} 2 \ln(u) \right]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{u^i}{(i+1)^2} du \right) = 2 \int_0^1 \dfrac{u^i}{(i+1)^2} du = \dfrac{2}{(i+1)^3}$.

(Les limites des crochets existent et sont finies donc toutes les intégrales sont de même nature et la dernière est convergente).

2: Par croissance de l'intégrale, $\dfrac{1}{i+1} \leq \int_i^{i+1} \dfrac{1}{t} dt \leq \dfrac{1}{i}$ donc $\ln(i+1) - \ln(i) \leq \dfrac{1}{i}$ et donc $\ln(n+1) - \ln(1) = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln(i+1) - \ln(i) \leq H_n$ et si $i \geq 2$, $\dfrac{1}{i} \leq \ln(i) - \ln(i-1)$ donc $\sum\limits_{i=2}^{n} \dfrac{1}{i} \leq \ln(n)$ donc $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n+1)$

Donc $0 \leq \dfrac{H_n}{n^2} \leq \dfrac{\ln(n)}{n^2} + \dfrac{1}{n^2}$. Or $\dfrac{\frac{\ln(n)}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \to_{n \to +\infty} 0$ donc $\dfrac{\ln(n)}{n^2} = o_{n \to +\infty}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}} \right)$ donc par comparaison avec une SATP convergente, $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ converge absolument donc $\sum \dfrac{H_n}{n^2}$ converge/

3: $\dfrac{1}{k(n+k)} \sim_{k \to +\infty} \dfrac{1}{k^2}$ donc la série converge.

De plus, $\dfrac{1}{k(n+k)} = \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{(n+k)} \right)$ donc

$\sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{1}{k(n+k)} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{N} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{(n+k)} \right) = \dfrac{1}{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=n}^{n+N} \dfrac{1}{k} \right) = \dfrac{1}{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=N+1}^{n+N} \dfrac{1}{k} \right) \to_{N \to +\infty} \dfrac{H_n}{n}$

car $0 \leq \sum\limits_{k=N+1}^{n+N} \dfrac{1}{k} \leq \dfrac{n}{N} \to_{N \to +\infty} 0$. On a donc $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(n+k)} = \dfrac{H_n}{n}$

4: $x \mapsto x^{n-1} \ln(1-x)$ est continue sur $[0, 1[$. Le changement de variable $u = 1 - x$ donne, sous réserve de convergence, $\int_0^1 x^{n-1} \ln(1-x) \, dx = \int_0^1 (1-u)^{n-1} \ln(u) \, du$ et et $(1-u)^{n-1} \ln(u) \sim_{u \to 0} \ln(u)$ et $u \mapsto \ln(u)$ est intégrable sur $]0, 1]$ donc $\int_0^1 (1-u)^{n-1} \ln(u) \, du$ converge donc $\int_0^1 x^{n-1} \ln(1-x) \, dx$ converge.

5: Pour $x \in [0, 1[$, $x^{n-1} \ln(1-x) = -x^{n-1} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} -\dfrac{x^{n+k-1}}{k}$.

Posons $u_k(x) = -\dfrac{x^{n+k-1}}{k}$.

On a $\int_0^1 |u_k(x)|\,dx = \left[\dfrac{x^{n+k}}{k(n+k)}\right]_0^1 = \dfrac{1}{k(n+k)} \sim_{k\to+\infty} \dfrac{1}{k^2}$ donc la série $\sum \int_0^1 |u_k(x)|\,dx$ est convergente donc (les deux autres hypothèses du th d'interversion série intégrale sur I quelconque sont à vérifier), on a $\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\,dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)\,dx = -\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^1 u_k(x)\,dx = -\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k(n+k)} = -\dfrac{H_n}{n}$ d'après la question 3.

6: On a donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{H_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{-1}{n}\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 v_n(x)\,dx$ avec $v_n(x) = \dfrac{-1}{n}x^{n-1}\ln(1-x)$.

On a pour $x\in\,]0,1[\ v_n(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x}\times\dfrac{-x^n}{n}$ donc la série $\sum v_n(x)$ converge et a pour somme $\dfrac{\ln(1-x)^2}{x}$

Appliquons le théorème d'interversion série intégrale sur $]0,1[$.

- v_n est intégrable sur $[0,1[$ et $\int_0^1 |v_n(x)|\,dx = \int_0^1 v_n(x)\,dx = \dfrac{H_n}{n^2}$

- la série de fonctions $\sum v_n$ converge simplement sur $]0,1[$ et a pour somme $x\mapsto\dfrac{\ln(1-x)^2}{x}$ qui est continue par morceaux car continue.

- La série $\sum\int_0^1 |v_n(x)|\,dx$ converge (d'après la deuxième question).

On en déduit que $x\mapsto\dfrac{\ln(1-x)^2}{x}$ est intégrable sur $]0,1[$ et $\int_0^1\dfrac{\ln(1-x)^2}{x}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{H_n}{n^2}$.

Or $\int_0^1\dfrac{\ln(1-x)^2}{x}dx = \int_0^1\dfrac{\ln(u)^2}{1-u}du = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u^n\ln(u)^2\right)du$.

et $\int_0^1\left|u^n\ln(u)^2\right|du = \dfrac{2}{(n+1)^3}$ (première question) donc la série $\sum\int_0^1\left|u^n\ln(u)^2\right|du$ converge

donc d'après le théorème d'interversion série intégrale,

$\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{H_n}{n^2} = \int_0^1\dfrac{\ln(u)^2}{1-u}du = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 u^n\ln(u)^2\,du\right) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^3}$.

Exercice 4 *Ccinp: Montrer que la fonction de la variable réelle définie par* $f(x) = \dfrac{sh(x)-x}{x^3}$ *admet un prolongement de classe* C^∞.

Solution de l'exercice: Pour $x\neq 0$, $\dfrac{sh(x)-x}{x^3} = \dfrac{\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-x}{x^3} = \dfrac{\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x^3} = \dfrac{\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{x^3}$

donc $\dfrac{sh(x)-x}{x^3} = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n+3)!}$. La fonction $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n+3)!}$ est une somme de série entière donc est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et prolonge $x\mapsto\dfrac{sh(x)-x}{x^3}$.

Exercice 5 *(centrale) Soit* $a\in\mathbb{R}$, *avec* $|a|<1$. *On pose, pour* $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sin(a^n x)$.

1. *Justifier que la fonction sinus est* 1*-lipschitzienne sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que la fonction* f *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* f *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.
3. *Déterminer les fonctions* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *continues vérifiant* $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)-g(ax) = \sin(x)$.
4. *Montrer que pour tout* $k\in\mathbb{N}^*$, *pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $\left|f^{(k)}(x)\right|\leq\dfrac{1}{1-|a|}$. *En déduire que* f *est développable en série entière sur* $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice:

1: La fonction $u: x\mapsto\sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $|u'(x)| = |\cos(x)|\leq 1$. D'après l'inégalité des accroissements

finis, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|\sin(b) - \sin(a)| \leq 1\,|\times b - a|$.
On a donc , $|\sin(x) - \sin(0)| \leq |x - 0|$ donc $|\sin(x)| \leq |x|$
Posons $u_n(x) = \sin(a^n x)$. et prenons $b > 0$. Si $x \in [-b, b]$, $|u_n(x)| \leq a^n |x| \leq a^n b$ et $\sum a^n$ converge donc $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-b, b]$ et les u_n sont continues donc f est définie et continue sur $[-b, b]$ donc sur $\mathbb{R}$.

2:Appliquons le théorème de dérivation terme à terme généralisé aux dérivées successives.
Les fonctions u_n sont de classe C^∞.
On a $u_n(x) \sim_{n\to+\infty} a^n x$ et $\sum |a^n x|$ est convergente car $|a| < 1$ donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Soit $a > 0$. Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément. On a $u_n^{(k)}(x) = \varepsilon_k \times (a^n)^k \times v_k(x)$ avec $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$ et $v_k(x) = \sin(x)$ ou $v_k(x) = \cos(x)$ donc $\left\|u_n^{(k)}\right\|_\infty \leq (a^n)^k = \left(a^k\right)^n$ et $\left|a^k\right| < 1$ donc la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que f est de classe C^∞ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x)$.

3: On a $f(ax) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sin(a^{n+1}x) =. \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin(a^n x) = f(x) - \sin(x)$ donc $f(x) - f(ax) = \sin(x)$ et f est continue donc f est solution du problème.
Analyse: Supposons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) - g(ax) = \sin(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
On a $g(a^n x) - g(a^{n+1}x) = \sin(a^n x)$. La série $\sum \sin(a^n x)$ converge donc on peut sommer cette égalité:
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(g(a^n x) - g(a^{n+1}x)\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x) = f(x)$.
Or $\sum\limits_{n=0}^{N} \left(g(a^n x) - g(a^{n+1}x)\right) = g(x) - g\left(a^{N+1}x\right) \to_{N\to+\infty} g(x) - g(0)$ car g est continue en 0
donc $g(x) - g(0) = f(x)$. On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + \lambda$.
Réciproquement (synthèse à vérifier) les fonctions $x \mapsto f(x) + \lambda$ sont bien solutions du problème.
4: D'après Q2, On a donc $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|u_n^{(k)}(x)\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|\left(a^k\right)\right|^n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a|^n$ car $\left|a^k\right| \leq |a|$ donc $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq \dfrac{1}{1 - |a|}$.
La fonction f est de classe C^{n+1} donc la formule de Taylor Lagrange, avec $M_{n+1} = \sup_{\mathbb{R}} \left|f^{(n+1)}\right| \leq \dfrac{1}{1 - |a|}$
$\left|f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\right| \leq M_{n+1} \dfrac{|x - 0|^{n+1}}{(n+1)!} dt \leq \dfrac{1}{1 - |a|} \dfrac{(x)^{n+1}}{(n+1)!} \to_{n\to+\infty} 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$. On en déduit que $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ et cette égalité étant vraie pour tout x donc f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 *(centrale): On pose, pour x réel,* $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{t^x}{1 + t^2} dt$.

1. *Etudier l'ensemble de définition de F.*
2. *Etudier la continuité et la parité de F.*
3. *Etudier la dérivabilité de F.*
4. *Déterminer les limites au bornes de l'ensemble de définition de F.*
5. *Montrer que* $F(x) = \int_0^1 \dfrac{t^x + t^{-x}}{1 + t^2} dt$ *et donner un équivalent simple de F aux bornes de son ensemble de définition.*

Solution de l'exercice: 1: En 0: $\dfrac{t^x}{1 + t^2} \sim_{t\to0} t^x > 0$ donc $\int_0^1 \dfrac{t^x}{1 + t^2} dt$ converge si et seulement si $x > -1$.
En $+\infty$: $\dfrac{t^x}{1 + t^2} \sim_{t\to0} t^{x-2} > 0$ donc $\int_0^1 \dfrac{t^x}{1 + t^2} dt$ converge si et seulement si $2 - x > 1$ c'est-à-dire $x < 1$. La

fonction F est définie sur $]-1,1[$.
2: Continuité: Soit $a \in]0,1[$. Nous allons effectuer une domination pour $x \in]-a,a[$.
- Si $t \in]0,1]$ et $x \in]-a,a[$ $t^x = e^{x\ln(t)}$ et $\ln(t) \leq 0$ donc $t^x < t^{-a}$ donc $\left|\dfrac{t^x}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{t^{-a}}{1+t^2}$.
- Si $t \in]1,+\infty[$ et $x \in]-a,a[$ $t^x < t^a$ donc $\left|\dfrac{t^x}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{t^a}{1+t^2}$.
La fonction $\varphi : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{t^{-a}}{1+t^2} \text{ si } t \in]0,1] \\ \dfrac{t^a}{1+t^2} \text{ si } t > 1 \end{cases}$ est continue par morceaux et vérifie $\forall t \in]0,+\infty[$, $\forall x \in]-a,a[$ $\left|\dfrac{t^x}{1+t^2}\right| \leq \varphi(t)$. De plus elle est intégrable sur $]0,+\infty[$ (étude analogue à Q1) donc la fonction F est continue sur $[-a,a]$ et donc sur $]-1,1[$ car a est quelconque.
Parité: On a $F(-x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{t^{-x}}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty} \dfrac{\left(\frac{1}{t}\right)^x}{t^2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}dt = -\int_{+\infty}^0 \dfrac{u^x}{1+u^2}dt = F(x)$ (changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$ de classe C^1 strictement décroissant et bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.
3: Posons $g(x,t) = \dfrac{t^x}{1+t^2}$. On a donc $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\ln(t) \times t^x}{1+t^2}$. $\forall t \in]0,+\infty[$, $\forall x \in]-a,a[$ $\left|\dfrac{t^x}{1+t^2}\right| \leq \psi(t)$ avec $\psi(t) = \dfrac{\ln(t)\,t^{-a}}{1+t^2}$ si $t \in]0,1]$ et $\psi(t) = \dfrac{\ln(t)\,t^a}{1+t^2}$ si $t \in]1,+\infty[$. La fonction ψ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$: En 0, $\psi(t) \sim_{t\to 0} \ln(t)\,t^{-a} > 0$ et si $a < b < 1$, $\ln(t)\,t^{-a} = o_{t\to 0}\left(t^{-b}\right)$ et $t \mapsto t^{-b}$ intégrable sur $]0,1]$. En $+\infty$, $\psi(t) \sim_{t\to 0} \ln(t)\,t^{a-2} > 0$ et si $a-2 < b < -1$, $\ln(t)\,t^{-a} = o_{t\to 0}\left(t^b\right)$ et $t \mapsto t^b$ intégrable sur $[1,+\infty[$. On en déduit que F est de classe C^1 sur $]-a,a[$ et donc sur $]-1,1[$ et $F'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)\dfrac{t^x}{1+t^2}dt$.
4 On a $F(x) \geq \int_0^1 \dfrac{t^x}{1+t^2}dt \geq \int_0^1 \dfrac{t^x}{2}dt = \dfrac{1}{2(x+1)}$ (pour le calcul de cette intégrale, distinguer les cas $x \geq 0$ et $x < 0$ où l'intégrale est généralisée). On en déduit que $\lim\limits_{x\to -1} F(x) = +\infty$. Par parité, $\lim\limits_{x\to 1} F(x) = +\infty$.
5: On montre $F(x) = \int_0^1 \dfrac{t^x + t^{-x}}{1+t^2}dt$ en posant $u = \dfrac{1}{t}$ dans $\int_1^{+\infty} \dfrac{t^x}{1+t^2}dt$. On va montrer que $F(x) \sim_{x\to -1} \int_0^1 t^x dt = \dfrac{1}{x+1}$. On a $F(x) - \dfrac{1}{x+1} = \int_0^1 \dfrac{t^x+t^{-x}}{1+t^2} - t^x dt = \int_0^1 \dfrac{t^{-x}+t^{x+2}}{1+t^2}dt$ et $0 \leq \dfrac{t^{-x}+t^{x+2}}{1+t^2} \leq 2$ donc $0 \leq F(x) - \dfrac{1}{x+1} \leq 2$ donc $F(x) - \dfrac{1}{x+1} = o_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ donc $F(x) \sim_{x\to -1} \dfrac{1}{x+1}$er un équivalent simple de F aux bornes de son ensemble de définition. $(-x+1)F(x) = (-x+1)F(-x) \to_{x\to 1} 1$ donc $F(x) \sim_{x\to -1} \dfrac{1}{-x+1}$.

Exercice 7 *(Centrale 2) On considère l'équation $(1-x)y'' = y$ sur $]-\infty,1[$.*

1. *Justifier qu'il existe une et une seule solution f de cette équation vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.*
2. *Avec python: Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-2;0,95]$.*
3. *Avec python: Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $a_n = \dfrac{n-2}{n}a_{n-1} + \dfrac{1}{n(n-1)}a_{n-2}$. Représenter graphiquement a_n pour $n \in [0,100]$.*
4. *Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.*
5. *Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{100} a_k x^k$.sur $[-2;0,95]$. Que constate-on? Démontrer le résultat.*

Solution de l'exercice:

On a $(E) = (1-x)y'' = y$ sur $]1,+\infty[\Leftrightarrow y'' - \dfrac{1}{(1-x)}y = 0$. D'après le théorème de Cauchy, 'il existe une et une seule solution f de cette équation vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

```
"""representation de la solution f"""
def f(X,t): # fonction de l'equa diff X'=f(X,t)
    return [X[1],1/(1-t)*X[0]]
from scipy.integrate import odeint
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
liste_t=np.linspace(0,0.95,100)
sol=odeint(f,[0,1],liste_t) # X[0]=[0,1]
plt.plot(liste_t,sol[:,0]) # sol array 100,2: premiere col: valeurs de y, deuxieme: valeurs de y'
liste_t=np.linspace(0,-2,100) # liste des temps de 0 \U{e0} -2 (temps parcouru en sens inverse
sol=odeint(f,[0,1],liste_t) # X[0]=[0,1]
plt.plot(liste_t,sol[:,0])
"""representation des an"""
liste_n=[n for n in range(101)]
liste_a=[0,1]
a,b=0,1
for n in range(2,101):
    c=(n-2)/n*b+a/(n*(n-1))
    liste_a.append(c)
    a,b=b,c
plt.plot(liste_n,liste_a) # on constate 0<=an<=1
```

Montrons par récurrence sur n que $0 \leq a_n \leq 1$. C'est vrai pour $n = 0, 1$.

Soit $n \geq 2$. Supposons $0 \leq a_{n-2} \leq 1$ et $0 \leq a_{n-1} \leq 1$.
On a $a_n = \dfrac{n-2}{n} a_{n-1} + \dfrac{1}{n(n-1)} a_{n-2} \leq \dfrac{n-2}{n} + \dfrac{1}{n(n-1)} \leq \dfrac{n-2}{n} + \dfrac{1}{n} < 1$ car $n - 1 \geq 1$ et $a_n \geq 0$ donc $0 \leq a_n \leq 1$. Posons $b_n = 1$. La série entière $\sum b_n x^n$ est de rayon 1 et $0 \leq a_n \leq b_n$ donc le le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

```
""" representation de S100(x)
def S100(x):
    S,p=0,1
    for i in range(101):
        S=S+liste_a[i]*p
        p=p*x
    return S
liste_S=[S100(t) for t in liste_t]
plt.plot(liste_t,liste_S)
plt.plot(liste_t,sol[:,0])
```

Pour tout $n \geq 0$, $n(n-1)a_n - (n-2)(n-1)a_{n-1} + a_{n-2} = 0$ donc si $|x| < 1$,
$\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n-2} = 0$ (toutes les séries ont même rayon que $\sum a_n x^n$).
Or $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} = x \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = x f''(x)$ et
$\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-1)a_{n-1}x^{n-2} = x \sum\limits_{n=2}^{+\infty} (n-2)(n-1)a_{n-1}x^{n-3} = x \sum\limits_{n=3}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = x f'(x) - a_2 = x f'(x)$ car $a_2 = 0$.et $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n-2} = f(x)$ donc $S(x)$ vérifie l'équation (E) et comme $S(0) = a_0 = 0$ et $S'(0) = a_1 = 1$, on en déduit avec le théorème de Cauchy que $S = f$.

Exercice 8 *(IMT) Existence et calcul de* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n\sin^2(n\theta)}{2^n}$.

Solution de l'exercice: Posons $u_n = n^2 \dfrac{n\sin^2(n\theta)}{2^n}$. On a $|n^2 u_n| \leq \dfrac{n^3}{2^n} \to_{n\to+\infty} 0$ donc $u_n = o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc la série converge absolument.

On a $\dfrac{n\sin^2(n\theta)}{2^n} = \dfrac{n\frac{1-\cos(2n\theta)}{1}}{2^n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n}{2^n} - \dfrac{n\cos(2n\theta)}{2^n}\right) = \frac{1}{2}(v_n + w_n)$.avec $v_n = \dfrac{n}{2^n}$ et $w_n = \dfrac{n\cos(2n\theta)}{2^n}$.

On pose $z_0 = \dfrac{e^{i2\theta}}{2}$, on a $\dfrac{\cos(2n\theta)}{2^n} = \operatorname{Re}(z_0^n)$ donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\operatorname{Re}(z_0^n) = \operatorname{Re}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(z_0)^n\right)$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Posons, pour $|x|<1$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. On a $g'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1}$ donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$. Ce calcul ne vaut que pour x réel.

Pour calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n$ il faut étendre cette relation à $z\in\mathbb{C}$. En utilisant le produit de Cauchy de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ par elle même pour $|z|<1$, on obtient de même, $\dfrac{1}{(1-z)^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 1\times 1 = n+1$, donc $\dfrac{1}{(1-z)^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n$ donc $\dfrac{z}{(1-z)^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nz^n$.

On pose $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nz^n$. On a donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{2^n} = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\left(\dfrac{e^{i2\theta}}{2}\right)^n = f\left(\dfrac{e^{i2\theta}}{2}\right)$ donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n\cos(2n\theta)}{2^n} = \operatorname{Re}\left(f\left(\dfrac{e^{i2\theta}}{2}\right)\right)$ d'où $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n\sin^2(n\theta)}{2^n} = \dfrac{1}{2}\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right) - \operatorname{Re}\left(f\left(\dfrac{e^{i2\theta}}{2}\right)\right)\right)$. Or $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$ et

$$f\left(\frac{e^{i2\theta}}{2}\right) = \frac{\frac{e^{i2\theta}}{2}}{\left(1-\frac{e^{i2\theta}}{2}\right)^2} = \frac{2e^{i2\theta}}{4-4e^{i2\theta}+e^{i4\theta}} = \frac{2e^{i2\theta}\left(4-4e^{-i2\theta}+e^{-i4\theta}\right)}{\left(4-4e^{i2\theta}+e^{i4\theta}\right)\left(4-4e^{-i2\theta}+e^{-i4\theta}\right)}$$ donc

$$f\left(\frac{e^{i2\theta}}{2}\right) = \frac{8e^{i2\theta}-8-2e^{-i2\theta}}{33-20\left(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}\right)+4\left(e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}\right)} = \frac{8e^{i2\theta}-8-2e^{-i2\theta}}{33-40\cos(2\theta)+8\cos(4\theta)}$$ et

$\operatorname{Re}\left(f\left(\dfrac{e^{i2\theta}}{2}\right)\right) = \dfrac{-8+6\cos(2\theta)}{33-40\cos(2\theta)+8\cos(4\theta)}$ d'où $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = 1 + \dfrac{4-3\cos(2\theta)}{33-40\cos(2\theta)+8\cos(4\theta)}$.

Exercice 9 *(X PSI 2022)*

Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continue et bornée. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-nt}f(t)}{\sqrt{t}}dt$.

1. *On suppose que $f(0)\neq 0$. Trouver un équivalent de a_n.*

2. *Même question si f est la fonction sinus?*

   Solution de l'exercice:

   Existence de a_n: Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+, h_n : t\mapsto \frac{e^{-nt}f(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ si $n\in\mathbb{N}^*$. Comme f est bornée sur $\mathbb{R}_+, h_n(t) = \frac{e^{-nt}f(t)}{\sqrt{t}} = \mathrm{O}_{t\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc h_n est intégrable en 0 . Comme f est bornée sur $\mathbb{R}_+$, on a aussi $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(t)}{\sqrt{t}} = 0$ $h_n(t) \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(e^{-nt}\right) \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(e^{-t}\right)$, par comparaison, h_n est aussi intégrable en $+\infty$. Ainsi, a_n est bien défini pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ quelle que soit la fonction $\mathrm{f}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continue et bornée.

   1: Pour $n\in\mathbb{N}^*, h_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi_n : t\mapsto nt$ est une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, par changement de variable, en posant $u = nt = \varphi_n(t)$, on a $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}f(u/n)}{\sqrt{u}}du$ par linéarité de l'intégrale. On pose $g_n : u\mapsto \frac{e^{-u}f(u/n)}{\sqrt{u}}$ de sorte que $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} g_n(u)du$.

(H_1) Comme f est continue en $0, (g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $g : u \mapsto \frac{e^{-u}f(0)}{\sqrt{u}}$.

(H_2) Les fonctions $\mathrm{g_n}$ et la fonction g sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u > 0, |g_n(u)| = \frac{e^{-u}|f(u/n)|}{\sqrt{u}} \leqslant \frac{e^{-u}||f||_{\infty,\mathbb{R}_+}}{\sqrt{u}} = \varphi(u)$ et φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}+^*$ car $\varphi(\mathfrak{u}) \underset{0}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$ et $\varphi(\mathfrak{u}) \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(e^{-\mathrm{u}}\right)$ comme avant.

Par théorème de convergence dominée, on peut conclure que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(u)du = \int_0^{+\infty} g(u)du$ donc que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(u)du = f(0)\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du = 2f(0)\int_0^{+\infty} e^{-v^2}dv$ en posant $u = \psi(v) = v^2$ avec ψ bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On reconnaît l'intégrale de Gauss et on a donc $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(u)du = f(0)\sqrt{\pi} \neq 0$ par hypothèse d'où, avec le calcul précédent, que $a_n \underset{+\infty}{\sim} f(0)\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme en a., on a $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\sin(u/n)}{\sqrt{u}}du$. Pour pouvoir utiliser $\sin(t) \sim_{t\to 0} t$, on écrit plutôt $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u}e^{-u}\sin(u/n)}{(u/n)}du$. On pose $k_n : u \mapsto \frac{\sqrt{u}e^{-u}\sin(u/n)}{(u/n)}$ de sorte que, dorénavant, on aura $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} k_n(u)du$.

(H_1) Comme $\sin(t) \underset{o}{\sim} t, (k_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $k : u \mapsto \sqrt{u}e^{-u}$.

(H_2) Les fonctions k_n et la fonction k sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

(H_3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u > 0, |k_n(u)| = \frac{\sqrt{u}e^{-u}|\sin(u/n)|}{(u/n)} \leqslant \sqrt{u}e^{-u} = \psi(u)$ car il est classique que $\forall \mathrm{t} > 0, |\sin(\mathrm{t})[\leqslant \mathrm{t}$ et ψ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}+^*$ car ψ se prolonge par continuité en 0 en posant $\psi(0) = 0$ et que $\psi(u) \underset{+\infty}{=} \mathrm{o}\left(e^{-(\mathrm{u}/2)}\right)$ par croissances comparées.

Par théorème de convergence dominée, on peut conclure que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} k_n(u)du = \int_0^{+\infty} k(u)du$ donc que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} k_n(u)du = \int_0^{+\infty} \sqrt{u}e^{-u}du = I$. Par intégration par parties, en posant $a(u) = \sqrt{u}$ et $b(u) = -e^{-u}$, comme a et b sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\lim_{u\to 0^+} a(u)b(u) = \lim_{u\to+\infty} a(u)b(u) = 0$, on a
$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après a.. Ainsi, si $f = \sin, a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}}$.