Analyse 5: lundi 10 juin
Intégrales à parmètre continu
Equas diffs EVN

Exercice 1 *(Ccinp) Résoudre l'équation différentielle* $(\mathcal{E}) : xy' + y = \dfrac{1}{1-x}$ *sur l'intervalle* $]-\infty, 1[$.

Solution de l'exercice: Sur $]0,1[$, $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{1-x}$Equation homogène: $y' + \dfrac{1}{x}y = 0$ de solutions $x \mapsto \lambda e^{-\ln(x)} = \frac{\lambda}{x}$. Idem sur $]-\infty, 0[$.
Variation de la constante: $y(x) = z(x)\, y_0(x)$ avec $y_0(x) = \dfrac{1}{x}$.
Après calcul, y vérifie $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow z'(x) = \dfrac{1}{1-x} \Leftrightarrow z(x) = -\ln(1-x) + \lambda$. On obtient (même méthode sur $]-\infty[$
Sur $]-\infty, 0[$ les solutions sont les fonctions $x \mapsto \frac{C_1}{x} - \frac{1}{x}\ln(1-x)$.
Sur $]0,1[$ les solutions sont les fonctions $x \mapsto \frac{C_2}{x} - \dfrac{\ln(1-x)}{x}$.
Prolongement par continuité en 0 :
Or $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1$ donc si $C_1 \neq 0$, $\lim_{x\to 0^-} y(x) = \pm\infty$. $C_1 = 0$ et $\lim_{x\to 0^-} y(x) = 1$. On obtient de même que $C_2 = 0$.
La fonction définie par $f(x) = \dfrac{-\ln(1-x)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ $\left(\dfrac{-\ln(1-x)}{x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}\right)$ donc de classe C^∞ sur $]-1,1[$ donc sur $]-\infty, 1[$ et vérifie l'équation en $x = 0$: $0f'(0) + f(0) = f(0) = 1$. La fonction f est donc l'unique solution sur $]-\infty, 1[$.

Exercice 2 *(Ccinp): Soit f la fonction définie par* $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$.

1. *Montrer que la fonction f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.*
2. *Etudier le sens de variation de f. Montrer que f admet un prolongement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.*
3. *Etudier les branches infinies de la courbe C_f.*

Solution de l'exercice: 1: Si $x > 0$ alors $[x, 2x] \subset]0, +\infty[$ donc La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est définie et continue sur $[x, 2x]$ et $F(x)$ est défini. De même, $F(x)$ est défini si $x < 0$. Soit F une primitive de $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ sur $\mathbb{R}^*$. On a $f(x) = F(2x) - F(x)$. La fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. On a $f'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{2x} - \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{e^{2x} - e^x}{x}$.
2: On a donc $f'(x) > 0$ (distinguer $x > 0$ et $x < 0$).
Limite en 0:
Si $x > 0$, si $x \leq t \leq 2x$, alors $e^x \leq e^t \leq e^{2x}$ donc $e^x \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \leq e^{2x} \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt$ donc $e^x \ln(2) \leq f(x) \leq e^{2x}\ln(2)$.
On a donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ln(2)$.
Si $x < 0$, alors $2x < x$ donc si $2x \leq t \leq x$, alors $e^{2x} \leq e^t \leq e^x$ donc $\dfrac{e^x}{t} \leq \dfrac{e^t}{t} \leq \dfrac{e^{2x}}{t}$ $e^x \int_{2x}^x \frac{1}{t}dt \leq \int_{2x}^x \frac{e^t}{t}dt \leq e^{2x} \int_{2x}^x \frac{1}{t}dt$ et on aboutit à $e^{2x}\ln(2) \leq f(x) \leq e^x \ln(2)$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \ln(2)$. On prolonge par $f(0) = \ln(2)$ (on note encore f le prolongement obtenu).
Par ailleurs, $f'(x) = \dfrac{e^{2x} - e^x}{x} = \dfrac{x + o_{x\to 0}(x)}{x} \to_{x\to 0} 1$ et f est continue en 0 donc, d'après le théorème limite de

la dérivée, La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1 = \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ donc f' est continue en 0 donc f est C^1 sur $\mathbb{R}$.
3: L'encadrement, sur $]-\infty, 0[$, $e^{2x}\ln(2) \leq f(x) \leq e^{x}\ln(2)$ entraîne que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote. L'inégalité $]0, +\infty[$ $e^{x}\ln(2) \leq f(x)$ entraîne que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Il n'y a donc pas d'assymptote (On dit qu'il y a une branche parabolique de direction asymptotique (Oy)).

Exercice 3 *(IMT): On cherche les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^{x} : (\mathcal{E})$$

1. *Justifier que si f vérifie $(\mathcal{E})$ alors f est de classe C^∞ et vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2.*

2. *Déterminer les fonctions vérifiant $(\mathcal{E})$.*

Solution de l'exercice: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = e^{x}$. On a donc $f'(x) = e^{x} - f(-x)$ donc f' est classe C^1, f de classe C^2 et $f''(x) = e^{x} + f'(-x)$ or $f'(-x) = e^{-x} - f(x)$ donc f vérifie l'équation différentielle $y" + y = e^{x} + e^{-x}$. On remarque que $x \mapsto ch(x)$ est une solution particulière donc $f(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + ch(x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.Synthèse: Soit f la fonction définie par $f(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + ch(x)$. On a $f'(x) + f(-x) = -\lambda\sin(x) + \mu\cos(x) + sh(x) + \lambda\cos(x) - \mu\sin(x) + ch(x)$ donc $f'(x) + f(-x) = (\mu+\lambda)\cos(x) - (\lambda+\mu)\sin(x) + e^{x}$. Donc f est solution du problème si et seulement si $\lambda = -\mu$ (prendre par exemple $x = 0$). L'ensemble des fonctions solutions est donc l'ensemble des fonctions $x \mapsto \lambda(\cos(x) - \sin(x)) + ch(x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 *(ccinp) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et l'équation différentielle (E) : $y'' - 9y = a|x| + b$.*

1. *Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.*

2. *Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.*

3. *Montrer que (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$ admettant une asymptote en $\pm\infty$.*

Solution de l'exercice:
1. Le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est fixé. Les solutions de l'équation homogène (E_0) : $y'' - 9y = 0$ sont les fonctions $y : x \mapsto Ae^{3x} + Be^{-3x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ d'après le cours. Il est clair que les fonctions $f_1 : x \mapsto -\frac{ax+b}{9}$ et $f_2 : x \mapsto \frac{ax-b}{9}$ sont respectivement solutions particulières de l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, il existe d'après ce qui précède quatre scalaires réels A_1, A_2, B_1, B_2 tels que $\forall x > 0, y(x) = A_1e^{3x} + B_1e^{-3x} - \frac{ax+b}{9}$ et $\forall x < 0, y(x) = A_2e^{3x} + B_2e^{-3x} + \frac{ax-b}{9}$.
2: Recollement des solutions: y est de classe C^2 donc
- Continuité de y en $0, y(0) = \lim_{x\to 0^+} y(x) = A_1 + B_1 - \frac{b}{9} = \lim_{x\to 0^-} y(x) = A_2 + B_2 - \frac{b}{9}$ donc $\boxed{A_1 + B_1 = A_2 + B_2 : (1)}$
- Continuité de y' en 0 , $\lim_{x\to 0^+} y'(x) = 3A_1 - 3B_1 - \frac{a}{9}$ et $\lim_{x\to 0^-} y'(x) = 3A_2 - 3B_2 + \frac{a}{9}$ donc $\boxed{A_1 - B_1 = A_2 - B_2 + \frac{2a}{27} : (}$
En additionnant et en soustrayant (1) et (2): $A_2 = A_1 - \frac{a}{27}$ et $B_2 = B_1 + \frac{a}{27}$.
soit $(A_1, B_1) \in \mathbb{R}^2$ et la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(0) = A_1 + B_1 - \frac{b}{9}$, par $\forall x > 0, y(x) = A_1e^{3x} + B_1e^{-3x} - \frac{ax+b}{9}$ et $\forall x < 0, y(x) = \left(A_1 + \frac{a}{27}\right)e^{3x} + \left(B_1 - \frac{a}{27}\right)e^{-3x} + \frac{ax-b}{9}$
- Continuité de y'' en 0, $\forall x > 0, y''(x) = 9A_1e^{3x} + 9B_1e^{-3x}$ et $\forall x < 0, y''(x) = 9\left(A_1 - \frac{a}{27}\right)e^{3x} + 9\left(B_1 + \frac{a}{27}\right)e^{-3x}$ donc $\lim_{x\to 0^+} y''(x) = \lim_{x\to 0^-} y''(x) = 9A_1 + 9B_1$ et y est donc deux fois dérivable en 0 (théorème de prolongement C^1 appliqué à y') avec $y''(0) = 9A_1 + 9B_1$. Ainsi $y''(0) + y(0) = 9A_1 + 9B_1 - 9\left(A_1 + B_1 - \frac{b}{9}\right) = b = a|0| + b$. Finalement, y est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $(A_1, B_1) \in \mathbb{R}^2, y(0) = A_1 + B_1 - \frac{b}{9}$, $\forall x > 0, y(x) = A_1e^{3x} + B_1e^{-3x} - \frac{ax+b}{9}$ et $\forall x < 0, y(x) = \left(A_1 + \frac{a}{27}\right)e^{3x} + \left(B_1 - \frac{a}{27}\right)e^{-3x} + \frac{ax-b}{9}$.
3:. Si une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ a l'expression ci-dessus, pour que C_y admette une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = \alpha x + \beta$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \alpha$.

On en déduit que $A_1 = 0$. De même et pour que C_y admette une asymptote en $-\infty$, il est nécessaire et suffisant qu'on ait $B_1 - \frac{a}{27} = 0$. Réciproquement, la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(0) = \frac{a}{27} - \frac{b}{9}$, $\forall x > 0, y(x) = \frac{a}{27}e^{-3x} - \frac{ax+b}{9}$ et $\forall x < 0, y(x) = \frac{a}{27}e^{3x} + \frac{ax-b}{9}$ possède des asymptotes en $\pm\infty$, respectivement les droites d'équations $y = -\frac{ax+b}{9}$ et $y = \frac{ax-b}{9}$.

Exercice 5 *(Navale 2017) Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ lipschitzienne de rapport $k < 1$ admet un point fixe unique.*

Solution de l'exercice: **Posons** $g(x) = f(x) - x$. On a $|f(x) - f(0)| \leq k|x - 0|$.
Si $x > 0$, alors $f(x) - f(0) \leq kx$ et donc $g(x) \leq (k-1)x + f(0) \to_{x\to+\infty} -\infty$. On en déduit qu'il existe $a > 0$ tel que $g(a) < 0$.
Si $x < 0$, $|f(x) - f(0)| \leq -kx$ donc $kx \leq f(x) - f(0)$ donc $g(x) \geq (k-1)x + f(0) \to_{x\to-\infty} +\infty$ donc $\exists b < 0$ tel que $g(b) > 0$.
La fonction g est continue car f est lipschitzienne donc continue donc $\exists c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0$ c'est-à-dire $f(c) = c$.
Montrons que c est unique. Soit d un point fixe de f. On a $|c - d| = |f(c) - f(d)| \leq k|c - d|$ et $k < 1$ donc $|c - d| = 0$ donc $c = d$.

Exercice 6 *(Ccinp) Pour $x > 0$, on pose* $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-xt} dt$.

1. *Montrer que f est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.*
2. *Déterminer la limite de f en $+\infty$.*
3. *Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.*
4. *Montrer qu'il existe une constante c telle que* $f(x) = \dfrac{c - \ln(x)}{x}$.

Solution de l'exercice: 1: Posons $g(x, t) = \ln(t)\, e^{-xt}$.

- Soit $x > 0$. L'application $t \mapsto g(x, t)$ est C.P.M. car continue sur $]0, +\infty[$: En 0: $|\ln(t)\, e^{-xt}| \sim_{t\to0} |\ln(t)|$.
- Soit $t > 0$. L'application $x \mapsto g(x, t)$ est continue.$]0, +\infty[$.
- Soit $a > 0$ et $x \in [a, +\infty[$. $|\ln(t)\, e^{-xt}| \leq |\ln(t)|\, e^{-at} = \varphi(t)$. la fonction φ est C.P.M. et intégrable sur $]0, +\infty[$:
  - $\varphi(t) \sim_{t\to0}= |\ln(t)|$ qui est intégrable sur $]0, 1]$.
  - $t^2 \ln(t)\, e^{-at} = o_{t\to\infty}(t^3 e^{-at})$ donc $t^2 \ln(t)\, e^{-at} \to_{t\to+\infty} 0$ donc $\ln(t)\, e^{-at} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc φ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On en déduit que f est continue sur tout intervalle $[a, +\infty[$ donc sur $]0, +\infty[$.
2: On va utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu
Montrons que $(F(x_n))$ converge vers 0.
On a $F(x_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-x_n t} dt = \int_0^{+\infty} u_n(t)\, dt$ et appliquons le théorème de convergence dominée.

- Si $t >$ à? $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t) = 0 = u(t)$. La suite de fonctions (u_n) converge simplement vers u sur $]0, +\infty[$.
- u_n et u sont C.P.M. car continues sur $]0, +\infty[$:

- A partir d'un certain rang, $x_n \geq 1$.donc, comme dans la question précédente, on peut dominer (à partir de ce rang, par φ avec $\varphi(t) = |\ln(t)|\, e^{-t}$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n) = 0$ et cela est valable pour toute suite (x_n) de limite $+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.
3: Appliquons la formule de Leibniz:

- Soit $x > 0$. L'application $t \mapsto g(x,t)$ est C.P.M. et intégrable sur $]0,+\infty[$: En 0: $|\ln(t)\, e^{-xt}| \sim_{t\to 0} |\ln(t)|$. En $+\infty$: $t^2 \ln(t)\, e^{-xt} = o(t^3 e^{-xt})$ donc $t^2 \ln(t)\, e^{-xt} \to_{t\to+\infty} 0$ donc $\ln(t)\, e^{-xt} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

- L'application g admet une dérivée partielle par rapport à x et $\dfrac{\partial g}{\partial x} = -t\ln(t)\, e^{-xt}$.

- Soit $x > 0$. L'application $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue donc continue par morceaux.

- Soit $t > 0$. L'application $x \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue.

- Soit $a > 0$ et $x \in [a,+\infty[$. $|-t\ln(t)\, e^{-xt}| \leq t\,|\ln(t)|\, e^{-at} = \varphi(t)$. la fonction φ est C.P.M. et intégrable sur $]0,+\infty[$: $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(t) = 0$ et $\varphi(t) = o_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ (idem).

On en déduit que f est définie et de classe C^1 sur tout intervalle $[a,+\infty[$ donc sur $]0,+\infty[$ et
$f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -t\ln(t)\, e^{-xt}dt$.
4: On effectue une intégration par parties: Sous réserve de limites finies,
$\displaystyle\int_0^{+\infty} t\ln(t)\, e^{-xt}dt = \left[-\tfrac{1}{x}t\ln(t)\, e^{-xt}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (\ln(t)+1)\,\tfrac{1}{x}e^{-xt}dt$. On a $\lim\limits_{t\to 0} t\ln(t) = 0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{x}t\ln(t)\, e^{-xt} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t\ln(t) = o_{t\to\infty}(t^2)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 e^{-xt} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{x}t\ln(t)\, e^{-xt} = 0$ donc $x\displaystyle\int_0^{+\infty} t\ln(t)\, e^{-xt}dt = \int_0^{+\infty} (\ln(t)+1)\, e^{-xt}dt = \int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-xt}dt + \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt$ d'où $xf'(x) = -f(x) - \frac{1}{x}$. La fonction f vérifie donc l'équation $xy' + y = -\frac{1}{x}$: (E).
L'équation homogène $y' + \frac{1}{x}y = 0$ admet pour solution $x \mapsto \lambda e^{-\ln(x)} = \dfrac{\lambda}{x}$. Avec la méthode de variation de la constante, $y_P(x) = \dfrac{-\ln(x)}{x}$ définit une solution (vérif: $y' + \frac{1}{x}y = \dfrac{-1+\ln(x)}{x^2} + \dfrac{-\ln(x)}{x^2} = \dfrac{-1}{x^2}$) donc y_P est une solution particulière de l'équation donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ donc $f(x) = \dfrac{-\ln(x)}{x} + \dfrac{\lambda}{x}$.
Remarque: il serait intéressant de déterminer λ mais ce n'était pas demandé (la limite en $+\infty$ ne suffit pas).

Exercice 7 *Soit les équations* $(E_0) : x^2y'' - 2y = 0$ *et* $(E) : x^2y'' - 2y = x^3$.

1. *Trouver une solution polynomiale* $\mathfrak{u}$ *de* (E_0).
2. *Trouver une fonction* v *solution de* (E_0)*, indépendante de* $\mathfrak{u}$*, écrite sous la forme* $v(x) = \mathfrak{u}(x)z(x)$ *avec* z *de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *ou* $\mathbb{R}_-^*$.
3. *Déduire de la question précédente les solutions de* (E) *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *ou* $\mathbb{R}_-^*$.
4. *Trouver toutes les solutions de* (E) *sur* $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice:
1: On remarque que $y : x \mapsto x^2$ est une solution polynomiale de (E_0).
(Si on ne la voit pas, en notant n le degré d'une solution polynomiale $y : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ de (E_0) avec $a_n \neq 0$, en identifiant les termes en x^n dans (E_0), on a $n(n-1)a_n - 2a_n = 0$ donc, comme $a_n \neq 0$, il vient $n(n-1) - 2 = n^2 - n - 2 = (n-2)(n+1) = 0$ donc $n = 2$ car $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, s'il existe une solution polynomiale de (E_0), elle est forcément de degré 2 . Ensuite, en notant $y(x) = ax^2 + bx + c$ et en reportant dans (E_0), il reste $\forall x \in \mathbb{R}, 2ax^2 - 2\left(ax^2 + bx + c\right) = -2bx - c = 0$ donc $b = c = 0$ et on a bien $y(x) = ax^2$).
2: Si on se donne une fonction v de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, en posant $z(x) = \frac{v(x)}{x^2}$, la fonction z est aussi de classe C^2 et $v(x) = x^2 z(x)$ donc $v'(x) = 2xz(x) + x^2 z'(x)$ puis $v''(x) = 2z(x) + 4xz'(x) + x^2 z''(x)$. Ainsi, v est solution de (E_0) sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$ si et seulement si $\forall x \in I, 2x^2 z(x) + 4x^3 z'(x) + x^4 z''(x) - 2x^2 z(x) = 0$ ou encore $(F) : xz''(x) + 4z'(x) = 0$ ce qui équivaut au fait que z' vérifie $(G) : xw' + 4w = 0$ sur I soit à:
il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, z'(x) = \frac{\lambda}{x^4}$ et les solutions de (F) sont donc les fonctions $z : x \mapsto \frac{\alpha}{x^3} + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. En prenant $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, on trouve donc $z(x) = \frac{1}{x^3}$ donc $v : x \mapsto \frac{1}{x}$ est une solution de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ et elle est bien indépendante de u.
3: Comme l'équation (E_0) est linéaire, homogène et normalisée, l'ensemble de ses solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ est un espace vectoriel de dimension 2 , il est donc engendrée par u et v d'après les deux questions précédentes. Les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont donc les fonctions $y : x \mapsto \frac{\alpha}{x} + \beta x^2$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On constate comme en a. que $y_p : x \mapsto \frac{x^3}{4}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $y : x \mapsto \frac{\alpha}{x} + \beta x^2 + \frac{x^3}{4}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
4: - Analyse : soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, ainsi y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Les restrictions de y à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont les solutions vues en **c**. donc il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x < 0, y(x) = \frac{\alpha_1}{x} + \beta_1 x^2 + \frac{x^3}{4}$ et $\forall x > 0, y(x) = \frac{\alpha_2}{x} + \beta_2 x^2 + \frac{x^3}{4}$. En prenant $x = 0$ dans (E), on a $y(0) = 0$. La continuité de y en 0 implique que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Alors on a $y_d'(0) = 2\beta_2 \times 0 = 0 = y_g'(0)$ donc y est dérivable en 0 et $\forall x \leq 0, y'(x) = 2\beta_1 x + \frac{3x^2}{4}$ et $\forall x \geq 0, y'(x) = 2\beta_2 x + \frac{3x^2}{4}$.
On a alors $y_d''(0) = 2\beta_2$ et $y_d''(0) = 2\beta_1$ donc $\beta_1 = \beta_2$.
- Synthèse : Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \beta x^2 + \frac{x^3}{4}$, alors y est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et y vérifier aussi (E) en $x = 0$ (tous les termes s'annulent en 0).
Conclusion : les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les $y : x \mapsto \beta x^2 + \frac{x^3}{4}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 *(Mines ponts) On définit, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right|$ et $N_2(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$.*

1. *Montrer que N_1 et N_2 sont des norme de $\mathbb{R}[X]$.*
2. *On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = \dfrac{X^n}{n}$. Etudier la convergence de la suite (P_n) pour les normes N_1 et N_2.*

Solution de l'exercice: Q1: La définition de N_1 est assurée car la somme est finie et la définition de N_2 est assurée car un polynôme est continu donc borné sur le segment $[0,1]$. De plus, N est une norme de E si et seulement si $\begin{cases} \forall P \in E,\ N(P) \geq 0 : (i) \text{ et } N(P) = 0 \Leftrightarrow P = 0 : (ii) \\ \forall P \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda P) = |\lambda|\, N(P) : (iii) \\ \forall (P,Q) \in E^Z,\ N(P+Q) \leq N(P) + N(Q) : (iv) \end{cases}$. Le point (i) est vérifié pour N_1 et N_2. Si $N_1(P) = 0$, alors $\forall k$, $P^{(k)}(0) = k!ak = 0$ donc P est nul. Si $N_2(P) = 0$, alors P admet une infinité de racines donc est nul. Les points (iii) et (iv) pour N_1 découlent des point (iii) et (iv) pour la valeur absolue. Les points (iii) et (iv) pour N_2 (idem cours sur la norme infinie). Q2: On a $P_n^{(n)} = \dfrac{n!}{n}$ donc $N_2(P_n) \geq \dfrac{n!}{n}$ (il y a même égalité). La suite (P_n) n'est pas bornée donc ne converge pas pour la norme N_1. On a $N_2(P_n) = \sup_{t \in [0,1]} \left|\dfrac{t^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} N_2(P_n - 0) = 0$ donc la suite (P_n) converge vers le polynôme nul pour la norme N_2.
Remarque: Les normes N_1 et N_2 ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 9 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \cos(\alpha \times \arcsin(x))$.*

1. *Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par la fontion f sur un intervalle à préciser.*

2. *En déduire un développement en série entière de f.*

Solution de l'exercice: 1: On a, pour $x \in \left]-1,1\right[$, $f'(x) = -\alpha\frac{\sin(\alpha \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$ et $f''(x) = -\alpha^2\frac{\cos(\alpha\arcsin x)}{1-x^2} - x\alpha\frac{\sin(\alpha\arcsin x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ donc la fonction f est solution de $(\mathcal{E}) : (1-x^2)\,y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$.
2: La fonction f est solution de $(\mathcal{E})$ et vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. D'après le théorème de Cauchy, f est l'unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $\left]-1,1\right[$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Cherchons des fonctions développables en séries entières sur $\left]-R,R\right[$ avec $R > 0$, $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ solutions de $(\mathcal{E})$ et vérifiant $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Posons $h(x) = (1-x^2)\,y'' - xy' + \alpha^2 y = (1-x^2)\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2} - x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \alpha^2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ d'où
$h(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\,a_n x^n - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \alpha^2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
$h(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)\,a_{n+2}x^n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\alpha^2 - n^2)\,a_n x^n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)\,a_{n+2} - (\alpha^2-n^2)\,a_n\right)x^n$. La fonction y est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{n^2-\alpha^2}{(n+2)(n+1)}a_n$ d'où $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k^2-\alpha^2)}{(2p)!}$. Vérifions que y est bien définie: on $\left|\dfrac{a_{n+2}x^{n+2}}{a_n x^n}\right| = \left|\dfrac{n^2-\alpha^2}{(n+2)(n+1)}x^2\right| \rightarrow_{n\to+\infty} |x^2|$ donc la série converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$ donc $R = 1$.
On en déduit que y et f vérifient la mémé équation avec les mêmes conditions de Cauchy donc $y = f$.
$\forall x \in \left]-1,1\right[$, $f(x) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} a_{2p}x^{2p}$ avec $a_{2p} = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{p-1}\left((2k)^2 - \alpha^2\right)}{(2p)!}$.

Exercice 10 *(Centrale) Pour $n \geq 1$, on pose E_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients réels. Montrer que $\inf\limits_{P\in E_n}\left(\int_0^1 |P(t)|\,dt\right) > 0$.*

Solution de l'exercice: $\left\{\int_0^1 |P(t)|\,dt, P \in E_n\right\}$ est non vide minoré par 0 donc $\inf\limits_{P\in E_n}\left(\int_0^1 |P(t)|\,dt\right)$ existe et $\inf\limits_{P\in E_n}\left(\int_0^1 |P(t)|\,dt\right) \geq 0$
Première méthode: Supposons $\inf\limits_{P\in E_n}\left(\int_0^1 |P(t)|\,dt\right) = 0$. Par la caractérisation de la borne inférieure avec les suites (fait dans une autre feuille de révision),
il existe une suite (P_k) vérifiant $\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P_k \in E_n \\ \int_0^1 |P_k(t)|\,dt \leq \dfrac{1}{n} \end{cases}$.
L'égalite $N(P) = \int_0^1 |P(t)|\,dt$ définit une des normes équivalentes de $\mathbb{R}_n[\mathbb{X}]$ donc $N(P_k - 0) \rightarrow_{k\to+\infty} 0$ donc la suite (P_k) tend vers le polynôme nul.
Posons $P_k = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{i,k}X^k$ avec $a_{n,k} = 1$. La convergence dans $\mathbb{R}_n[\mathbb{X}]$ équivaut à la convergence "coordonnée par coordonée". Or $0 = \sum\limits_{i=0}^{n} 0X^k$ donc $\forall i \in [[0,n]]$, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{i,k} = 0$, ce qui n'est pas possible pour $i = n$ donc $\inf\limits_{P\in E_n}\left(\int_0^1 |P(t)|\,dt\right) > 0$
Deuxième méthode: On cherche à appliquer le th des bornes atteintes mais E_n n'est pas borné.
On a $\int_0^1 |t^n|\,dt = \frac{1}{n+1} \leq 1$. Soit E_n' l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients réels vérifiant

$\int_0^1 |P(t)|\, dt \leq 1$. Les bornes inférieures de $\int_0^1 |P(t)|\, dt$ sur les ensembles E_n et E'_n sont égales. Montrons que E'_n est fermé et borné. L'égalite $N(P) = \int_0^1 |P(t)|\, dt$ définit une norme équivalente de $\mathbb{R}_n[\mathbb{X}]$ et $\forall P \in E'_n\ N(P) \leq 1$ donc E'_n est borné. Soit (P_k) une suite de E'_n qui converge vers P. On a donc $N(P_k) \to_{k\to+\infty} N(P)$ donc $N(P) \leq 1$. De plus les suites des coordonnées de (P_k) dans la base canonique convergent vers les coordonnées de P donc P est aussi unitaire donc $P \in E'_n$ donc E'_n est fermé. La fonction N admet donc un minimum $N(P_0)$ sur E'_n et ce minimum $N(P_0)$ est non nul car $P_0 \neq 0$ car $P_0 \in E_n$.

Exercice 11 *ENS Saclay PSI 2022*
Soit p et q deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'équation $(E) : y'' + py' + qy = 0$.

1. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une solution de (E) non identiquement nulle vérifiant $f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta; a+\eta]\backslash\{a\}, f(x) \neq 0$.*

2. *Soit f et g deux solutions de (E) telles que (f, g) est libre.*
   On définit $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$.

   (a) *Donner une équation différentielle vérifiée par W.*

   (b) *En déduire une expression de W en fonction de $t_0 \in \mathbb{R}$.*

   (c) *Montrer que pour tout réel t, on a $W(t) \neq 0$.*

   (d) *On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$, $f(a) = f(b) = 0$ et $\forall x \in]a; b[,\ f(x) \neq 0$. Montrer que g s'annule une et une seule fois sur $]a, b[$.*

Solution de l'exercice:
1: Comme $f(a) = 0$, si on avait aussi $f'(a) = 0$, la fonction f et la fonction nulle seraient toutes les deux solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ avec les mêmes conditions de CAUCHY en a donc, d'après le théorème de CAUCHY qui s'applique ici puisque les fonctions p et q sont continues sur $\mathbb{R}$, on aurait $f = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.
On a donc $f'(a) \neq 0$. Supposons, par exemple, $f'(a) > 0$. On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) > 0$ donc, par définition de la limite, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta; a+\eta]$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{f(x)}{x - a} > 0$ et donc $\forall x \in [a-\eta; a+\eta]\backslash\{a\}, f(x) \neq 0$.
2a. Comme f et g sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, par opérations, W est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour $t \in \mathbb{R}$, $W'(t) = f'(t)g'(t) + f(t)g''(t) - f'(t)g'(t) - f''(t)g(t) = f(t)(-p(t)g'(t) - q(t)g(t)) - (-p(t)f'(t) - q'(t)) f(t)g(t)$ donc $W'(t) = -p(t)(f(t)g'(t) - f'(t)g(t)) = -p(t)W(t)$. Ainsi, W est solution sur $\mathbb{R}$ de $(F) : y' + py = 0$.
2b: Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, notons $P : t \mapsto \int_{t_0}^t p(u)du$ la primitive de p qui s'annule en t_0, on sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de (F) sont les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{-\int_{t_0}^t p(u)du}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En évaluant en t_0, on obtient $\lambda = W(t_0)$ car $P(t_0) = 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R}, W(t) = W(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^t p(u)du}$.
2c: Supposons qu'il existe un réel t_1 tel que $W(t_1) = \begin{vmatrix} f(t_1) & g(t_1) \\ f'(t_1) & g'(t_1) \end{vmatrix} = 0$. Alors les colonnes de cette matrice sont liées ce qui montre l'existence de $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tel que $\lambda \begin{pmatrix} f(t_1) \\ f'(t_1) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} g(t_1) \\ g'(t_1) \end{pmatrix} = 0 : (e)$. Posons $h = \lambda f + \mu g$, comme l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel puisque (E) est linéaire et homogène, la fonction h est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. De plus, $h(t_1) = h'(t_1) = 0$ d'après (e). L'unicité de la solution à un problème de CAUCHY montre que $h = 0$. Ainsi, comme $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ et $\lambda f + \mu g = 0$, la famille (f, g) est liée contrairement à l'hypothèse de l'énoncé. Par l'absurde, on en déduit que W ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
2d. Comme f est continue sur $]a; b[$ et qu'elle ne s'y annule pas, elle y garde un signe constant, supposons par exemple que f est strictement positive sur $]a; b[$. Ainsi, $f'(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$ car $f(x) - f(a) = f(x) > 0$ et $x - a > 0$ si $x \in]a; b[$. De même, $f'(b) \leqslant 0$. Si on avait $f'(a) = 0$, f serait la fonction nulle (th de Cauchy) ce qui n'est pas le cas. Plus précisément, on a donc $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.

Comme W ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, par continuité, W garde aussi un signe constant. Ainsi, $W(a) = -f'(a)g(a)$ et $W(b) = -f'(b)g(b)$ sont de même signe, ce qui impose à $g(a)$ et $g(b)$ d'être de signes différents. Par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque g est continue, il existe $c \in]a; b[$ tel que $g(c) = 0$.

Supposons que g s'annule au moins deux fois sur $]a;b[$, en c et en e et supposons par exemple que $e > c$. Posons $d = \mathrm{Inf}(A)$ avec $A = \{x \in]c;e] \mid g(x) = 0\}$; d existe car A est non vide puisque $e \in A$ et A est minorée par c. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = d$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, g\left(a_n\right) = 0$, par continuité de g, on a donc $g(d) = 0$ par passage à la limite. Ainsi, $d = \mathrm{Inf}(A) = \mathrm{Min}(A)$.
Or $g\left(c\right) = 0$ et g n'est pas identiquement nulle donc d'après la question 1, $d > c$. Par construction, $g(c) = g(d) = 0$ et g ne peut pas s'annuler sur $]c,d[$. Par symétrie des rôles joués par f et g, on a prouvé précédemment que f s'annulait alors sur $]c;d[$, ce qui contredit l'hypothèse faite initialement sur f.
Par l'absurde, on a donc montré que g s'annulait une fois et une seule sur $]a;b[$.