Analyse 6: mercredi 12 juin
Fonctions de plusieurs variables, exercices de synthèse

Exercice 1 *(Ccinp) On s'intéresse aux fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant*

$$(E) : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\left\{ \begin{array}{c} x(u,v) = u \\ y(u,v) = u^2 + v \end{array} \right.$ *et $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.*

1. *Montrer que f vérifie (E) si et seulement si $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) = 0$.*

2. *Déterminer les solutions de (E).*

Solution de l'exercice: 1: Les fonctions $(u,v) \mapsto x(u,v)$ et $(u,v) \mapsto y(u,v)$ sont de classe C^1 donc si f est de classe C^1 alors F est de classe C^1 et (règle de la chaîne)
on a $\dfrac{\partial F}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + 2u\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + 2x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial F}{\partial u} = 0$.
2: donc f verifie (E) si et seulement si il existe une fonction C de classe C^1 telle que $F(u,v) = C(v)$ soit $f(x,y) = C(y - x^2)$.

Exercice 2 *(Ccinp): Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose, pour x réel, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^{nx}}$.*

1. *Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$. On définit $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.*

2. *La fonction S est-elle de classe continue sur son ensemble de définition?*

3. *La fonction S est-elle de classe C^1 sur son ensemble de définition?*

Solution de l'exercice: 1: Si $x < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^{nx}} = 1$ et si $x = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^{nx}} = \frac{1}{2}$ donc la série $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement.
Si $x > 0$, alors $\dfrac{1}{1+e^{nx}} \sim_{n\to+\infty} e^{-nx} = (e^{-x})^n$ et $0 < e^{-x} < 1$ donc par comparaison avec une série géométrique convergente, la série $\sum f_n(x)$ converge. La série de fonctions $\sum f_n$ converge donc simplement sur $]0,+\infty[$.
2: Posons $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et prenons $a > 0$. Si $x \in [a,+\infty[$, alors $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{e^{nx}} = e^{-nx} \leq e^{-na} = (e^{-a})^n$. On en déduit $\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| \leq (e^{-a})^n$ donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$. Les fonctions f_n étant continues, S est continue sur $[a,+\infty[$. Or a est quelconque donc S est continue sur $]0,+\infty[$.
3: Th de dérivabilité de la somme d'une série de fonctions:
- Les fonctions f_n sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $f_n'(x) = \dfrac{-ne^{nx}}{(1+e^{nx})^2}$.
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ 'déjà vu.
- Soit $a > 0$ et $x \in [a,+\infty[$. On commence par se "débarasser" du terme e^{nx} du dénominateur.
On a $|f_n'(x)| = \dfrac{ne^{nx}}{(1+e^{nx})^2} \leq \dfrac{ne^{nx}+n}{(1+e^{nx})^2} \leq \dfrac{n}{1+e^{nx}} \leq \dfrac{n}{e^{nx}}$.

(ou $|f_n'(x)| = \dfrac{ne^{nx}}{(1+e^{nx})^2} = |f_n'(x)| = \dfrac{ne^{nx}}{(e^{nx})^2(1+e^{-nx})^2} = \dfrac{n}{e^{nx}(1+e^{-nx})^2} \leq \dfrac{n}{e^{nx}}$).

Si $x \geq a$, alors $|f_n'(x)| \leq \dfrac{n}{e^{na}}$. On a donc $\|f_n'\|_\infty \leq \dfrac{n}{e^{na}}$ et $\dfrac{\frac{n}{e^{na}}}{\frac{1}{n^2}} = \dfrac{n^3}{e^{na}} \to_{n\to+\infty} 0$ donc $\dfrac{n}{e^{na}} = o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum \dfrac{n}{e^{na}}$ converge donc $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[a,+\infty[$. Comme $\sum f_n$ converge normalement donc simplement sur $[a,+\infty[$, on déduit que S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{ne^{nx}}{(1+e^{nx})^2}$.

Exercice 3 *(ccinp): Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ par $F(x,y) = \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$.*

Déterminer les fonctions φ pour lesquelles la fonction F vérifie l'équation $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 0 : (\mathcal{E})$.

Solution de l'exercice: La fonction φ étant de classe C^2, $x \mapsto \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$ est dérivable de dérivée $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

De même, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{y^2}\varphi''\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x}{y^2}\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right)$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{2x}{y^3}\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right) + \left(\dfrac{x}{y^2}\right)^2\varphi''\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

On en déduit que $y^2\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)\right) = \varphi''\left(\dfrac{x}{y}\right) + 2\dfrac{x}{y}\varphi'\left(\dfrac{x}{y}\right) + \left(\dfrac{x}{y}\right)^2\varphi''\left(\dfrac{x}{y}\right)$ et que F vérifie $(\mathcal{E})$ si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}$, $(1+t^2)\varphi''(t) + 2t\varphi'(t) = 0$ soit $\exists\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = \lambda e^{-\ln(1+t^2)} = \dfrac{\lambda}{1+t^2}$ et donc si et seulement si $\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \lambda\arctan(t) + \mu$.

Exercice 4 *(ccinp) Soit la suite réelle (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1}a_{n-1}$.*

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.*
2. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.*
3. *En déduire une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par la somme S.de cette série entière et calculer $S(x)$.*

Solution de l'exercice:

1: On a $1 \leq a_n \leq n^2$ pour $n=1$ et $n=2$. Soit $n \geq 1$ vérifiant $1 \leq a_{n-1} \leq (n-1)^2$ et $1 \leq a_n \leq n^2$. On a alors $1 \leq a_n \leq a_n + \dfrac{2}{n+1}a_{n-1} \leq n^2 + \dfrac{2(n-1)^2}{n+1} \leq n^2 + 2(n-1) \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ donc $\forall n$, $1 \leq a_n \leq n^2$.

2: On sait que si $0 \leq b_n \leq c_n$, le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum c_n x^n$ De plus $\sum x^n$ et $\sum n^2 x^n$ ont même rayon de convergence égal à 1 (la multiplication par n ne change pas le rayon de convergence) donc le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est 1.

3: Pour $n \geq 0$, $(n+2)a_{n+2} = (n+2)a_{n+1} + 2a_n$. Si $|x| < 1$, les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum na_n x^n$ convergent et $(n+2)a_{n+2}x^{n+1} = (n+2)a_{n+1}x^{n+1} + 2a_n x^{n+1}$

On en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)a_{n+1}x^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{n+1} = 0$.

On peut dériver terme à terme sur $]-1,1[$ et $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1} =$

$S'(x)-a_1$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1}x^{n+1}=xS'(x)$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_{n+1}x^{n+1}=S(x)-a_0$ donc les séries entières convergent pour $x\in\,]-1,1[$ et $S'(x)-a_1-(xS'(x)+(S(x)-a_0))-2xS(x)=0$ soit $(1-x)\,S'(x)-(2x+1)\,S(x)=0$. Une primitive de $a(x)=\dfrac{-2x-1}{1-x}=\dfrac{-2x+2}{1-x}-\dfrac{3}{1-x}=-2-\dfrac{3}{1-x}$ est $-2x-3\ln(1-x)$. On en déduit que $S(x)=\lambda e^{-2x}e^{-3\ln(1-x)}=\lambda\dfrac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$. Comme $S(0)=a_0=1$, $S(x)=\dfrac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$.
Commentaire: On pourrait tirer une expression de a_n en développant l'expression obtenue (avec un produit de Cauchy).

Exercice 5 *(ccinp) Déterminer les fonctions* $f:\,]0,+\infty[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *de classe* C^1 *vérifiant* $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}$: (E).*(on posera* $x(r,\theta)=r\cos(\theta)$ *et* $y(r,\theta)=r\sin(\theta)$.

Solution de l'exercice: On pose $F(r,\theta)=f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))=f(x(r,\theta),y(r,\theta))$. En appliquant la règle de la chaîne,
$\dfrac{\partial F}{\partial r}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}=\cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}+\sin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}$ donc $r\dfrac{\partial F}{\partial r}=r\cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}+r\sin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}=x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ donc $(E)\Leftrightarrow r\dfrac{\partial F}{\partial r}\Leftrightarrow\dfrac{\partial F}{\partial r}=1$.
Posons $G(r,\theta)=F(r,\theta)-r$. On a $\dfrac{\partial G}{\partial r}=\dfrac{\partial F}{\partial r}-1$ donc $\dfrac{\partial F}{\partial r}=1\Leftrightarrow\dfrac{\partial G}{\partial r}=0\Leftrightarrow$ il existe h de classe C^1.telle que n en déduit que $F(r,\theta)=r+h(\theta)$ avec h de classe C^1.
Comme $(x,y)\in\,]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, on peut prendre $(r,\theta)\in\,]0,+\infty[\times\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\dfrac{y}{x}=\tan(\theta)$ donc $\theta=\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ donc $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+h\left(\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)$.

Exercice 6 *(Ccinp): Soit* $a>0$, $I=[-a,a]$ *et* $\varphi\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$. *On suppose qu'il existe* $C>0$ *tel que* $\forall x\in I$, $|\varphi(x)|\leq|Cx|$. *Le but de l'exercice est de déterminer les fonction* $f\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ *vérifiant* $f(0)=0$ *et* $\forall x\in I$, $f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)=\varphi(x)$.

1. *Montrer que l'application* $g:x\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ *est définie et continue sur* I. *Montrer que* g *est solution du problème.*
2. *En déduire l'ensemble des fonctions solutions.*
3. *Montrer que si* φ *est de classe* C^1 *alors* f *est dérivable.*

Exercice 7 *(Mines ponts PSI 21): Déterminer les extrémums de* $(x,y)\to y\left(x^2+(\ln(y))^2\right)$ *sur* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$.

Solution de l'exercice: Posons $f(x,y)=y\left(x^2+(\ln(y))^2\right)$.
La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ et, si on pose $g(x,y)=y$ alors $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,g(x,y)>0\}$ avec g fonction continue donc $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. Un extrémum local de f est donc nécessairement atteint en un point critique de f.
$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+(\ln(y))^2+2\ln(y)\end{array}\right.$ donc $\begin{array}{c}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{array}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x=0\\ (\ln(y)+2)\ln(y)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow(x,y)=(0,1)$ ou $(x,y)=(0,e^{-2})$.
Etude du point $(0,1)$: On a $f(0,1)=0$ et $f(x,y)\geq0$ donc f admet un minimum global en $(0,1)$.
Etude du point $(0,e^{-2})$: Utilisation de la Hessienne
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=2x$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\dfrac{2}{y}(\ln(y)+1)$ donc $H_f(0,e^{-2}))=\begin{pmatrix}2e^{-2}&0\\0&-e^2\end{pmatrix}$.

$\exists\lambda \in spH_f\left(0,e^{-2}\right)\cap\left]0,+\infty\right[$ donc $f\left(0,e^{-2}\right)$ n'est pas un maximum
et $\exists\mu \in spH_f\left(0,e^{-2}\right)\cap\left]-\infty,0\right[$ donc $f\left(0,e^{-2}\right)$ n'est pas un minimum
f n'admet ni maximum ni minimum en $\left(0,e^{-2}\right)$.
Deuxième méthode:
Posons $\Delta\left(h,k\right)=f\left(h,e^{-2}+k\right)-f\left(0,e^{-2}\right)=\left(e^{-2}+k\right)\left(h^2+\left(\ln\left(e^{-2}+k\right)\right)^2\right)-e^{-2}\left(\ln\left(e^{-2}\right)\right)^2$.
On a $\Delta\left(h,0\right)=e^{-2}\left(h^2+\left(\ln\left(e^{-2}\right)\right)^2\right)-e^{-2}\left(\ln\left(e^{-2}\right)\right)^2=e^{-2}h^2>0$ si $h\neq 0$.
et $\Delta\left(0,k\right)=\left(e^{-2}+k\right)\left(\ln\left(e^{-2}+k\right)\right)^2-4e^{-2}$. Or $\ln\left(e^{-2}+k\right)=\ln\left(e^{-2}\right)+\ln\left(1+ke^2\right)=-2+ke^2-\dfrac{k^2e^4}{2}+o_{k\to 0}\left(k^2\right)$
donc $\Delta\left(0,k\right)=\left(e^{-2}+k\right)\left(4-4ke^2+2k^2e^4+o_{k\to 0}\left(k^2\right)\right)-4e^{-2}$
soit $\Delta\left(0,k\right)=-2k^2e^2+o_{k\to 0}\left(k^2\right)<0$ pour $h\neq 0$ suffisamment petit.
On en déduit que f n'admet pas d'extrémum local en $\left(0,e^{-2}\right)$ (point selle).

Exercice 8 *(CCINP PSI 21) On cherche une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue vérifiant la condition:*

$$\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2, f\left(x\right)f\left(y\right)=\int_{x-y}^{x+y}f\left(t\right)dt : (E)$$

1. *Résoudre, suivant la valeur du réel c l'équation $y''-cy=0$.*
2. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $F:\left(x,y\right)\mapsto\int_{x-y}^{x+y}f\left(t\right)dt$. Montrer que F est de classe C^2 et préciser $\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}$.*
3. *Soit f une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue vérifiant (E). Déterminer $f\left(0\right)$. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f''\left(x\right)f\left(y\right)-f\left(x\right)f''\left(y\right)$. En déduire les solutions de (E).*

Solution de l'exercice:
1: Les solutions sont les fonctions

$$x\mapsto\left\{\begin{array}{c}\lambda+\mu x \text{ si } c=0\\ \lambda\cosh\left(\sqrt{c}x\right)+\mu\sinh\left(\sqrt{c}x\right)\text{ si } c>0\\ \lambda\cos\left(\sqrt{-c}x\right)+\mu\sin\left(\sqrt{-c}x\right)\text{ si } c>0\end{array}\right.$$

où λ et μ sont des réels quelconques.
2: Soit g une primitive de f. On a $F\left(x,y\right)=g\left(x+y\right)-g\left(x-y\right)$. La fonction f est C^1 donc g est C^2 donc F est C^2 et
Le réel y étant fixé, la fonction $x\mapsto F\left(x,y\right)$ est dérivable de dérivée $\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(x,y\right)=g'\left(x+y\right)-g'\left(x-y\right)=f\left(x+y\right)-f\left(x-y\right)$. On obtient de même que
$\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}=f'\left(x+y\right)-f'\left(x-y\right)$.
De même $\dfrac{\partial F}{\partial y}=f\left(x+y\right)+f\left(x-y\right)$ et $\dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}='\left(x+y\right)-f'\left(x-y\right)$ donc $\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}=0$.
3: En prenant $x=y=0$ dans (E), on obtient $f\left(0\right)=0$.
Si f est la fonction nulle, alors f est de classe C^2.
Sinon, il existe $a\in\mathbb{R}$, $f\left(a\right)\neq 0$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\dfrac{1}{f\left(a\right)}\int_{x-a}^{x+a}f\left(t\right)dt$.
$x\mapsto\int_{x-a}^{x+a}f\left(t\right)dt$ est dérivable de dérivée $x\mapsto f\left(x+a\right)-f\left(x-a\right)$ qui est continue donc f est de classe C^1 et $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{f\left(a\right)}\left(f\left(x+a\right)-f\left(x-a\right)\right)$ donc f' est de classe C^1 donc f est de classe C^2.
L'égalité $F\left(x,y\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)$ permet un deuxième calcul de $\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}$ qui donne $f''\left(x\right)f\left(y\right)-f\left(x\right)f''\left(y\right)$. On en déduit que

$$\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2, f''\left(x\right)f\left(y\right)-f\left(x\right)f''\left(y\right)=0.$$

La fonction nulle est solution de (E). Supposons $f \neq 0$. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$. Posons $c = \dfrac{f''(a)}{f(a)}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - cf(x) = 0$$

En utilisant Q1 et le fait que $f(0) = 0$, on obtient les fonctions de la forme $f = x \mapsto \mu x$ ou $f : x \mapsto \mu \sin(\alpha x)$ ou $f : x \mapsto \mu \sinh(\alpha x)$ avec μ et α réels quelconques.
Synthèse:
$f = 0$ est solution. Dans la suite, on suppose $f \neq 0$ donc $\mu \neq 0$ et $\alpha \neq 0$.
Pour $f : x \mapsto \mu x$, on a $f(x) f(y) = \mu^2 xy$ et $\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt = \mu \left(\dfrac{(x+y)^2}{2} - \dfrac{(x-y)^2}{2} \right) = 2\mu xy$ donc f est solution si et seulement si $\mu^2 = 2\mu$ soit $\mu = 2$.
Pour $f : x \mapsto \mu \sin(\alpha x)$ on a $f(x) f(y) = \mu^2 \sin(\alpha x) \sin(\alpha y) = \dfrac{\mu^2}{2} (\cos(\alpha(x-y)) - \cos(\alpha(x+y)))$ et $\int_{x-y}^{x+y} \mu \sin(\alpha x$
$\dfrac{\mu}{\alpha} (-\cos(\alpha(x+y)) + \cos(\alpha(x-y)))$.
donc f est solution si et seulement si $\dfrac{\mu^2}{2} = \dfrac{\mu}{\alpha}$ soit $\alpha = \dfrac{2}{\mu}$.
Pour $f : x \mapsto \mu \sinh(\alpha x)$ on a $f(x) f(y) = \mu^2 \sinh(\alpha x) \sinh(\alpha y) = \dfrac{\mu^2}{2} (\cosh(\alpha(x+y)) - \cos(\alpha(x-y)))$ car
$\sinh(a)\sinh(b) = \dfrac{e^a - e^{-a}}{2} \dfrac{e^b - e^{-b}}{2} = \dfrac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{4} - \dfrac{e^{a-b} + e^{-a+b}}{4} = \dfrac{1}{2} (\cosh(a+b) - \cosh(a-b))$
et $\int_{x-y}^{x+y} \mu \sinh(\alpha x)\,dt = \dfrac{\mu}{\alpha} (\cosh(\alpha(x+y)) - \cosh(\alpha(x-y)))$.donc f est solution si et seulement si $\dfrac{\mu^2}{2} = \dfrac{\mu}{\alpha}$ soit $\alpha = \dfrac{2}{\mu}$.

Exercice 9 *(ccinp) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + x^2 y + y^3$*

1. *Montrer que f admet un point critique mais n'y atteint pas d'extremum local.*
2. *Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Justifier que D est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.*
3. *Montrer qu'il existe (x_0, y_0) et(x_1, y_1) appartenant à D tel que $\forall (x,y) \in D,\ f(x_0, y_0) \leq f(x,y) \leq f(x_1, y_1)$. Donner la valeur de $f(x_0, y_0)$ et $f(x_1, y_1)$.*

Solution de l'exercice: 1: La fonction f est définie et de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ donc si f admet un extremum en (x,y) alors (x,y) est un point critique de f. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2xy$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$. On a donc $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} \right) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$. Or $f(x,y) = x^2(y+1) + y^3$ donc $f(0,y) - f(0,0) = y^3$ qui change de signe en $y = 0$ donc f n'admet pas d'extrémum local en $(0,0)$.
2: Soit g la restriction de f à D. L'ensemble D est fermé car $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ h(x,y) \leq 0\}$ avec $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ qui est continue.
3: De plus D est borné.et g est continue donc g admet un maximum et un minimum. Posons $O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ h(x,y) < 0\}$.L'ensemble O est ouvert car h est continue donc, g admet un extremum en $(x,y) \in O$ alors (x,y) est un point critique. La première question entraîne que f n'admet pas d'extremum local dans O. On en déduit que le maximum et le minimum de g sont atteint sur $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$. Soit $(x,y) \in C$. Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = (\cos(t), \sin(t))$. On a $g(x,y) = x^2 + y(x^2 + y^2) = x^2 + y = \cos^2(t) + \sin(t) = \varphi(t)$. On a $\varphi'(t) = -2\sin(t)\cos(t) + \cos(t) = \cos(t)(1 - 2\sin(t))$. La fonction φ est croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$, décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, croissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$, décroissante sur $\left[\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Son maximum est dans

$\left\{\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right),\varphi\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right\}$. Or $\left(\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right),\varphi\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \left(\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right)$ donc $M = \frac{5}{4}$et il est atteint aux points $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Son minimum est dans $\left\{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right),\varphi\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right\}$. Or $\left(\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right),\varphi\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = (1,-1)$ donc $m = 1$ et il est atteint au point $(0,-1)$.

Exercice 10 *(Mines ponts) Soit $a \in]0;1[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(ax)$.*

1. *Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Exprimer $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ à l'aide de f.*

2. *En déduire que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.*

3. *Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = g(ax)$.*

Solution de l'exercice: 1a:Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle y est continue. Ainsi, par composition, $x \mapsto f(ax)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc f' aussi ce qui montre que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Si on suppose que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ pour un entier $n \geqslant 1$, alors $x \mapsto f(ax)$ est aussi de classe C^n sur $\mathbb{R}$ donc f' l'est encore et f est donc de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$. Par principe de récurrence, f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
1b: Pour $x \in \mathbb{R}$, on $af'(x) = f(ax)$ donc $f''(x) = af'(ax) = af\left(a^2x\right)$.
On continue: $f'''(x) = a \times a^2 f'\left(a^2x\right) = a^{1+2} f\left(a^3x\right)$ et $f^{(4)}(x) = a^{1+2}a^3 f'\left(a^3x\right) = a^{1+2+3} f\left(a^4x\right)$.
Supposons, pour $n \in \mathbb{N}$, qu'on ait $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}} f\left(a^n x\right)$. Alors, en dérivant cette relation, on a $f^{(n+1)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}} \times a^n f'\left(a^n x\right) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f\left(a^{n+1}x\right)$. Comme on a $f^{(0)}(x) = f(x) = a^{\frac{0(0-1)}{2}} f\left(a^0 x\right)$, on a montré pa récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}} f\left(a^n x\right)$.
2: Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction, f étant continue sur le segment $[0,x]$ (ou $[x,0]$) elle y est bornée et on peut poser $M = \|f\|_\infty^{[0;x]}$ et $M_{n+1} = \|f^{(n+1)}\|_\infty^{[0;x]}$
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}\right| \leq \frac{M_{n+1}|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$ (Taylor Lagrange)
Or $f^{(n+1)}(t) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f\left(a^{n+1}t\right)$ et $a^n t \in [-b;b]$ si $t \in [0,x]$ car $|a| < 1$, on a $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant a^{\frac{n(n+1)}{2}} M$.

Par inégalité triangulaire, on a $\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1} a^{\frac{n(n+1)}{2}} M}{n!}$ et, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} = 0$ car $|a| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}\right| = 0$
donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$.et comme $f^{(k)}(0) = a^{\frac{k(k-1)}{2}} f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0) \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k}{k!}$.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et la fonction $g_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_\lambda(x) = \lambda \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k}{k!}$. Si on pose $a_k = \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}}{k!} > 0$, on a $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a^k}{k+1}$ donc, comme $0 < a < 1, \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 0$ donc, par D'ALEMBERT, le rayon de convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ vaut $R = +\infty$ ce qui justifie que la fonction g_λ est bien définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, g'_\lambda(x) = \lambda \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{\frac{k(k+1)}{2}} x^k}{k!} = \lambda \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} (ax)^k}{k!} = g_\lambda(ax)$. Avec ce qui précède, les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = g(ax)$ sont les fonctions proportionnelles à $g_1 : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k}{k!}$, elles constituent donc une droite vectorielle $\operatorname{Vect}(g_1)$.

Exercice 11 *(ENS) Soit $I = [0,1]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $E = C^1(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions des fonctions de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par*

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

1. *Soit* $\varphi : \left\{ \begin{array}{c} E \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f'(0) \end{array} \right.$ *. Montrer que* φ *est une forme linéaire de* E *et qu'il existe une suite* (f_n) *de* E *vérifiant* $\left\{ \begin{array}{c} \|f_n\|_\infty = 1 \\ \text{la suite } (\varphi(f_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ a pour limite } +\infty \end{array} \right.$.
2. *On se donne une forme linéaire* $u : E \to \mathbb{R}$*. On suppose que* u *est positive c'est-à-dire que pour toute fonction* $f \in E$ *positive on a* $u(f) \geqslant 0$*. On pose* $e : x \to 1 \in E$*.*
   (a) *Montrer que* $\forall f \in E, |u(f)| \leqslant u(|f|)$*.*
   (b) *Montrer qu'il existe une constante* $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+$ *telle que* $\forall f \in E, |u(f)| \leqslant C\|f\|_\infty$*. En déduire que* u *est continue.*
   (c) *Calculer* $\underset{f\in E, f\neq 0}{\mathrm{Sup}} \frac{|\mathrm{u(f)}|}{\|\mathrm{f}\|}$*.*

Solution de l'exercice:

Soit $f \in E$, on a $f \leqslant |f|$ donc $g = |f| - f \geqslant 0$ ce qui donne, par hypothèse, $u(g) = u(|f|) - u(f) \geqslant 0$ par linéarité de u. De même, $-f \leqslant |f|$ donc $h = |f| + f \geqslant 0$ et, à nouveau $u(h) = u(|f|) + u(f) \geqslant 0$ donc $-u(|f|) \leqslant u(f) \leqslant u(|f|)$ ce qui garantit bien que $|u(f)| \leqslant u(|f|)$.

b. Pour $f \in E$, comme f est continue sur le segment I, elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes donc $|f| \leqslant \|f\|_{\infty,I}e$. On pose cette fois $a = \|f\|_{\infty,I}e - f \geqslant 0$ donc $u(a) \geqslant 0$ ce qui donne une nouvelle fois par linéarité de u, $\|f\|_{\infty,I}u(e) - u(|f|) \geqslant 0$. On a donc, d'après a., $|u(f)| \leqslant u(|f|) \leqslant \|f\|_{\infty,I}u(e)$ donc on a bien $\forall f \in E, |u(f)| \leqslant C\|f\|_{\infty,I}$ en posant $\mathrm{C} = u(e) \geqslant 0$ car e est positive sur I.

c. D'après la question précédente, $\forall f \in E\backslash\{0\}, \frac{|u(f)|}{\|f\|_{\infty,I}} \leqslant u(e)$. La partie $A = \left\{ \frac{|u(f)|}{|f\|_{\infty,I}} \middle| f \in E\backslash\{0\} \right\} \subset \mathbb{R}$ est non vide (car il existe des fonction non nulle sur I et majoré par $\mathfrak{u}(e)$ ce qui montre que la borne supérieure de l'énoncé existe et que $\mathrm{Sup}(A) \leqslant u(e)$. De plus, en prenant $f = e$, on a $e \in E\backslash\{0\}$ et $\frac{|u(f)|}{\|f\|_{\infty,I}} = u(e)$ donc $\mathfrak{u}(e) \in A$ ce qui montre que cette borne supérieure est un maximum (atteint en e) et que $\frac{|u(f)|}{\|f\|_{\infty,I}} = u(e)$.

Exercice 12 *(centrale) Soit la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = \frac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2+y^2}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$ *et* $f(0,0) = 0$*.*

1. *f est-elle continue sur* $\mathbb{R}^2$ *?*
2. *Calculer les dérivées partielles de* f *sur* $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$*. La fonction* f *est-elle de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ *?*
3. *La fonction* f *admet-elle des dérivées partielles en* $(0,0)$ *? Si oui, les calculer.*
4. *La fonction* f *est-elle de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$ *?*

Solution de l'exercice:

1: La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ (th opérations).

Utilisons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 en $a = 0$: $|\sin(x) - x| \leq \dfrac{x^2}{2}$.

On a $|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x\sin(y)-y\sin(x)}{x^2+y^2} - \frac{xy-yx}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x(\sin(y)-y)-y(\sin(x)-x)}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x(\sin(y)-y)}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y(\sin(x)-x)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|\frac{y^2}{2}}{x^2+y^2} + \frac{|y|\frac{x^2}{2}}{x^2+y^2} = \dfrac{|x|+|y|}{2}$.

La fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{|x|+|y|}{2}$ est continue de limite 0 en $(0,0)$ donc $\lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x,y) = f(0,0)$ donc f est continue en $(0,0)$.

2: Si $(x,y) \neq (0,0)$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\sin y - y\cos x}{x^2+y^2} - 2x\frac{x\sin y - y\sin x}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\sin x - x\cos y}{x^2+y^2} - 2y\frac{x\sin y - y\sin x}{(x^2+y^2)^2}$ qui sont continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ (th opérations) donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

3: On a $f(x,0)=0$ donc $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0\to_{x\to 0}0$. On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.
De même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.
4: On a $\sin y=y+O_{y\to 0}(y^3)$ et $\cos x=1+O_{x\to 0}(x^2)$. On en déduit
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\sin y-y\cos x}{x^2+y^2}-2x\frac{x\sin y-y\sin x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y+O_{y\to 0}(y^3)-y(1+O_{x\to 0}(x^2))}{x^2+y^2}-2x\frac{x(y+O_{y\to 0}(y^3))-y(x+O_{y\to 0}(x^3))}{(x^2+y^2)^2}$
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{O_{y\to 0}(y^3)-yO_{x\to 0}(x^2)}{x^2+y^2}-2x\frac{xO_{y\to 0}(y^3)-yO_{y\to 0}(x^3)}{(x^2+y^2)^2}\to_{(x,y)\to(0,0)}0$
(par exemple, si $x\times y\neq 0$, $(x^2+y^2)^2=x^4+2x^2y^2+y^4\geq 2x^2y^2>0$ donc
$\left|\frac{x^2O_{y\to 0}(y^3)}{(x^2+y^2)^2}\right|\leq\frac{x^2O_{y\to 0}(y^3)}{2x^2y^2}=O_{y\to 0}(y)\to_{(x,y)\to(0,0)}0$ et les autres termes s'étudient de la même manière).
On en déduit que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ donc sur $\mathbb{R}^2$.
De même pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13 *(Ccinp) Soit $\alpha>1$. On pose $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^\alpha}$. A quelle condition la série de terme général R_n est-elle convergente?*

Solution de l'exercice (non détaillée). On montre par comparaison avec une intégrale que $\int_{n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{t^\alpha}dt\leq\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}\leq\int_n^{+\infty}\dfrac{1}{t^\alpha}dt$ et le calcul de ces deux intégrales nous donne l'équivalent $R_n\sim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ qui permet de conclure que $\sum R_n$ converge si et seulement si $\alpha>2$.

Exercice 14 *(ccinp) Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation $4xy''-2y'+9x^2y=0:(E)$. Existe-t-il des solutions non développables en série entière?*

Solution de l'exercice: 1: On suppose que la fonction la série entière $\sum a_nx^n$ est de rayon $R>0$ et on pose, pour $x\in\,]-R,R[$,.$y(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ La fonction y est solution de (E) si et seulement si $4x\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+9x^2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0$ soit $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(4n(n-1)-2n)a_nx^{n-1}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}9a_nx^{n+2}=0$ c'est-à-dire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(4(n+1)n-2(n+$ $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}9a_{n-2}x^n=0$ soit $-2a_1x+4a_2x^2+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}((2(n+1)(2n-1))a_{n+1}+9a_{n-2})x^n=0$, c'est-à-dire $a_1=a_2=0$ et $\forall n\geq 2$, $((2(n+1)(2n-1))a_{n+1}+9a_{n-2})$ soit $\forall n\geq 0$, $a_{n+3}=\dfrac{-9a_n}{2(n+3)(2n+3)}$. On a donc par récurrence $a_{3k+1}=a_{3k+2}=0$ et $a_{3k}=-\dfrac{9}{(6k-3)\times(6k)}a_{3(k-1)}=-\dfrac{1}{2k\times(2k-1)}a_{3(k-1)}=\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}a_0$ donc donc $y(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}x^{3k}$. Si $x\geq 0$, alors $y(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{2k}=\cos\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$ et si $x<0$,

$\left(x\sqrt{-x}\right)^{2k}=(x)^{2k}(-x)^k=(-1)^kx^{3k}$ donc $y(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\left(x\sqrt{-x}\right)^{2k}}{(2k)!}=ch\left(x\sqrt{-x}\right)$ (il est inutile de déterminer le rayon de convergence car on retombe sur des séries entières connues).
2: Sur l'intervalle $]0,+\infty[$, $(E)\Leftrightarrow y''-\dfrac{1}{2x}y'+\dfrac{9}{4}xy=0$ et on en déduit que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.
Les solutions développables en série entières sont les fonctions colinéaires à $x\mapsto\cos\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$ dont l'ensemble est un espace vectoriel de dimension 1.
Conclusion: Il existe d'autres solutions.

Exercice 15 *(CCINP): Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$*
$N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f + f'\|_\infty$.

1. *Montrer que N_1 et N_2 sont des normes de E.*
2. *Soit $f \in E$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ $e^x f(x) = \int_0^x e^t (f(t) + f'(t))\, dt$.*
3. *En déduire que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.*

Solution de l'exercice: On admet que E est un espace vectoriel (vérification immédiate)

1: On sait que la norme infinie est une norme: $\begin{cases} \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty : (1) \\ \|f + g\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty : (2) \\ \|f\|_\infty \ge 0 \text{ et } \|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0 : (3) \end{cases}$. Il en découle facilement que (1), (2) et (3) sont vérifiées par N_1 et N_2.
Seul $N_2(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ n'en découle pas directement.
Soit $f \in E$. Supposons $N_2(f) = 0$. On a $\|f + f'\|_\infty = 0$ donc $f' + f = 0$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in [0,1], f(x) = \lambda e^{-x}$.
Or $f \in E$ donc $f(0) = 0$ donc $\lambda = 0$ donc $f = 0$.

2: Soit $f \in E$. Posons $g(x) = e^x f(x)$. La fonction g est dérivable (car f l'est) et $g'(x) = e^x (f(x) + f'(x))$ donc $\int_0^x e^t (f(t) + f'(t))\, dt = [g(t)]_0^x = e^x f(x) - f(0) = e^x f(x)$.

3: Il s'agit de montrer l'existence de $(\alpha, \beta) \in]0, +\infty[^2$ vérifiant: $\forall f \in F$, $\alpha N_2(f) \le N_1(f) \le \beta N_2(f)$.
Soit $f \in E$. On a $N_2(f) = \|f + f'\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = N_1(f)$. On peut donc prendre $\alpha = 1$.
On a $|e^x f(x)| = \left|\int_0^x e^t (f(t) + f'(t))\, dt\right| \le \int_0^x |e^t (f(t) + f'(t))|\, dt \le \int_0^x e^x \|f + f'\|_\infty\, dt$
donc $|e^x f(x)| \le x e^x \|f + f'\|_\infty \le e^x \|f + f'\|_\infty$.
On en déduit que $\forall x \in [0,1]$ $|f(x)| \le \|f + f'\|_\infty$ donc $\|f\|_\infty \le e \|f + f'\|_\infty$.
De plus $\|f'\|_\infty = \|f + f' - f\|_\infty \le \|f + f'\|_\infty + \|f\|_\infty \le 2 \|f + f'\|_\infty$. On peut donc prendre $\beta = 3$.

Exercice 16 *(ccinp) On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$.*

1. *Justifier l'existence de S et déterminer l'ensemble de définition de f.*
2. *Exprimer $f(x)$, pour $x \in]-1,1[$ au moyen des fonctions usuelles.*
3. *En déduire la valeur de S.*

Solution de l'exercice:

1. On a $\frac{1}{(n+1)(2n+1)} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} n^2$ donc S existe.
   On a $R = 1$ (par exemple avec D'alemebert) donc $f(x)$ existe pour $x \in]-1,1[$ et n'existe pas si $|x| > 1$.
   De plus f est définie en ± 1 car $\sum \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$ converge donc $D_f = [-1,1]$.

   2: D'après le cours, f est dérivable terme à terme sur $]-1,1[$ et $f'(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$. Par ailleurs, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ et $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ donc $\ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^{n-1} + 1\right) \frac{x^n}{n} = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)}$ donc $f'(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ donc $f(x) - f(0) = \int_0^x \ln(1+t) - \int_0^x \ln(1-t)\, dt = \int_0^x \ln(1+t) + \int_0^{-x} \ln(1+u)\, du$ donc (IPP) $f(x) = [(t+1)\ln(t+1) - (t+1)]_0^x + [(t+1)\ln(t+1) - (t+1)]_0^{-x}$ donc $f(x) = (x+1)\ln(x+1) + (1-x)\ln(1-x)$.

2. Montrons que la fonction f est continue sur $[-1,1]$: Posons $u_n(x) = \dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$. La fonction u_n est bornée sur $[-1,1]$ et $\|u_n\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |u_n(x)| = \dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}$ donc la série de fonctions converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$. Chaque fonction u_n étant continue, la fonction f est continue sur $[-1,1]$. On a donc $f(1) = S = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2\ln(2)$ car $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\ln(1-x) = \lim_{u\to 0^+} u\ln(u) = 0$.

Exercice 17 *(Navale 2018) Soit S la surface d'équation $x^2 - y^2 - z = 1$ et P le plan d'équation $x + 2y - z = 0$. Déterminer l'ensemble des points M de S tels que le plan tangent à S en M soit parallèle à P.*

Solution de l'exercice: Le plan tangent à S d'équation $f(x,y,z) = 0$ en un point régulier est normal au gradient de f. Ici, $\operatorname{grad}(f) = (2x, 2y, -1)$. Un vecteur normal à P est $\overrightarrow{n} = (1,2,-1)$. Le plan tangent à S en M de coordonnées (x,y,z) est parallèle à P si et seulement si $\overrightarrow{n}$ et $\operatorname{grad}(f)$ sont colinéaires soit $x = \frac{1}{2}$ et $y = 1$. Or $M \in S$ donc $z = x^2 - y^2 - 1 = -\frac{7}{4}$ d'où $M = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{7}{4}\right)$.

Exercice 18 *(TPE 2016) Trouver les plans tangents à la surface d'équation $z^2 = xy$ et contenant la droite (D) d'équations: $x = 2$ et $y + z = 1$.*

Solution de l'exercice:

Posons $f(x,y,z) = z^2 - xy$ et (S) la surface d'équation $f(x,y,z)$. Soit $M = (x_0, y_0, z_0) \in (S)$. Le point M est un point régulier de (S) si et seulement si $\operatorname{grad} f(M) \neq \overrightarrow{0}$. Dans ce cas le plan tangent à (S) en M est orthogonal à $\operatorname{grad} f(M) = (-y_0, -x_0, 2z_0) \neq (0,0,0)$ si $M \neq (0,0,0)$. Un point P=(x,y,z) appartient au plan tangent si et seulement si $\overrightarrow{MP} \perp \operatorname{grad} f(M) \Leftrightarrow -y_0(x - x_0) - x_0(y - x_0) + 2z_0(z - z_0) = 0 : (\Pi)$. Un point de la droite droite (D) : $\begin{cases} x = 2 \\ z = -y - 1 \end{cases}$ est de la forme $P = (2, y, -y-1)$, $y \in \mathbb{R}$. Le plan (Π) contient (D) si et seulement si $\forall y \in \mathbb{R}$, $-y_0(2 - x_0) - x_0(y - x_0) + 2z_0(-y - 1 - z_0) = 0$ soit $(-x_0 - 2z_0)y - 2y_0 + x_0y_0 + x_0^2 - 2z_0 - 2z_0^2 = 0$. Ceci est réalisé si et seulement si $\begin{cases} -x_0 - 2z_0 = 0 \\ -2y_0 + x_0y_0 + x_0^2 - 2z_0 - 2z_0^2 = 0 \\ z_0^2 = x_0y_0 : M \in (S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2z_0 \\ z_0^2 = -2z_0y_0 \text{ soit } z_0(z_0 + 2y_0) = 0 \\ -2y_0 + x_0y_0 + x_0^2 - 2z_0 - 2z_0^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x_0 = -2z_0 \\ z_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_0 = -2z_0 \\ z_0 = -2y_0 \\ -2y_0 + 4y_0^2 + 16y_0^2 + 4y_0 - 8y_0^2 = 0 \end{cases}$ or $-2y_0 + 4y_0^2 + 16y_0^2 + 4y_0 - 8y_0^2 = 0 \Leftrightarrow 2y_0 + 12y_0^2 = 0 \Leftrightarrow$ $y_0 = 0$ ou $y_0 = -\dfrac{1}{6}$. Le point $(0,0,0)$ n'étant pas régulier, l'unique solution est le point $M = \left(-\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{3}\right)$