Ex 1 : $N \in \mathbb{N}^*$. $H_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$

1) Mq $\underbrace{(H_N - \ln(N))}_{u_N}$ CV (vers γ).

Mq $\sum (u_{n+1} - u_n)$ CV en montrant $u_{n+1} - u_n = O_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$
(dl de $\ln(x)$ en 1).

2) Mq $\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} \, dt$ CV

$]0;1]$: comparaison $\frac{1}{\sqrt{t}}$; $[1;+\infty[$: comparaison $\frac{1}{t^2}$
$(e^{-t} = e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}})$.

3) $I_N = \int_0^N \left(1 - \frac{t}{N}\right)^{N-1} \ln(t) \, dt$: $\underbrace{\text{CV}}_{\text{par calcul}}$ + expression entre I_N et $H_N - \ln(N)$

- $x = 1 - \frac{t}{N}$ • IPP :
  $v(x) = x^N - 1$ $v'(x) = N x^{N-1}$

- $\frac{x^N - 1}{x - 1} = \sum_{k=0}^{N-1} x^k$

4) limite de I_N avec une intégrale. En déduire $\gamma = -\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} \, dt$.

th de convergence dominée sur $]0;+\infty[$ $\left(1 - \frac{t}{N}\right)^{N-1} \ln(t)$
CV vers $e^{-t} \ln(t)$

Ex 2 : $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

1) Mq $I_n - A$ inversible

2) Mq $M = (I_n + A)^{-1}(I_n - A) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

1) Mq $\lambda \in sp(A) \Rightarrow$ ~~$\lambda \in$~~ λ imaginaire pur
(idem $\underset{\text{demo}}{\lambda \in sp(S)} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ si S symétrique réelle). Donc $1 \notin sp(A)$.

2) calcul de $M M^T$ et $(I_n - A)$ et $(I_n + A)$ commutent.