Maths Oral Mines Ponts

Exercice 1. $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

Montrer que A diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\forall P \in \mathbb{C}[X], \exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tel que $P(M) = A$. (P non constant)

idée :

$\Rightarrow$ On suppose A diagonalisable

$\exists R \in GL_2(\mathbb{C})$ tq $A = RDR^{-1}$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ quelconque tel que $D = P(M)$

M diagonale et $\begin{cases} P(m_1) = \lambda_1 \\ P(m_2) = \lambda_2 \end{cases}$

$Q_1 = P - \lambda_1$ et $Q_2 = P - \lambda_2$ polynômes de $\mathbb{C}[X]$

donc admettent au moins 1 racine.

Donc $\exists M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$ tq $D = P(M)$

Puis $RDR^{-1} = RP(M)R^{-1}$

$A = P(\underbrace{RMR^{-1}}_{M'})$

$\Leftarrow$ Raisonnons par contraposition

mq A non diago $\Rightarrow \exists P$ tq $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $P(M) \neq A$.

On suppose A non diago

alors $Sp(A) = \{\lambda\}$ (il ne peut pas y avoir 2 racines distinctes et $Sp(A)$ ne peut pas être vide car χ_A admet au moins 1 racine car polynôme complexe)

On considère $P = X^2 + \lambda$.

$P(M) = M^2 + \lambda I_2$

$P(M) = A \Rightarrow M^2 + \lambda I_2 = A$

$M^2 = A - \lambda I_2$

On a $\chi_A = (X-\lambda)^2 \Rightarrow (A - \lambda I_2)^2 = 0$ (Cayley Hamilton)

$A - \lambda I_2$ nilpotente.

$P(M) = A \Rightarrow M$ nilpotente.

donc $Sp(M) = \{0\}$ $\chi_M = X^2$

donc $M^2 = 0 \Rightarrow A = \lambda I_2$

ce qui contredit le fait que A non diago
donc on a bien l'implication voulue

Exo 2

On considère $f(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-t^2x^2}}{1+t^3}\,dt$

1) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$
(théorème de continuité des intégrales à paramètres
sur $[a;+\infty[$, $a>0$).

2) Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{c}{x^a}$, $a>0$

(on ne cherche pas à calculer c, $a=2$
théorème de convergence dominée pour les
intégrales à paramètres appliqué à $x \mapsto x^2 f(x)$)

3) Trouver un équivalent de f en 0

(changement de variable $u = tx$)