Sujet Maths Oral ENS

Soient a, b réels tels que $a < 0 < b$

On pose $f(x) = \dfrac{ax}{b-a} + \ln\left(1 + \dfrac{a(1-e^{x})}{b-a}\right)$

1) a) Montrer que $0 < f''(x) \leq \dfrac{1}{4}$ sur D domaine de définition de f (à préciser)

b) en déduire $0 \leq f(x) \leq \dfrac{x^2}{8}$ sur D.

2) Soit X une Variable aléatoire à valeurs dans $[a;b]$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Montrer que $E(e^{\lambda X}) \leq \dfrac{b-x}{b-a} e^{\lambda a} + \dfrac{x-a}{b-a} e^{\lambda b}$

b) On suppose $E(X) = 0$

montrer que $E(e^{\lambda X}) \leq e^{f(\lambda(b-a))}$

c) Montrer que $E(e^{\lambda X}) \leq \exp\left(\lambda E(X) + \dfrac{\lambda^2(b-a)^2}{8}\right)$

($\to$ Poser $Y = X - E(X)$)

Sujet Oral maths X

Exercice 1

Soit V un espace vectoriel
Soient $(a,b) \in \mathcal{L}(V)^2$, on pose $[a,b] = a \circ b - b \circ a$

On a $(u,v,w) \in \mathcal{L}(V)^3$
tels que $[u,v] = w$
$[w,v] = 0$
$[w,u] = 0$

1) Soit $\lambda \in sp(w)$, montrer que $E_\lambda(w)$ est stable par u et v.
($\Rightarrow$ (w et v) et (w et u) commutent)

2) Soit $\dim(E_\lambda(w)) = 1$, montrer que $\lambda = 0$
Cas quelconque, montrer que $\lambda = 0$

($\Rightarrow$ $\dim(E_\lambda(w)) = 1$
donc $E_\lambda(w) = \text{vect}(x)$ (x vecteur propre non nul)
alors $u(x) \in \text{vect}(x)$ et $v(x) \in \text{vect}(x)$
Or $u \circ v - v \circ u = w$
on évalue en x : $\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

$\Rightarrow$ cas quelconque : on passe à la trace dans l'égalité $u \circ v - v \circ u = w$ en se restreignant sur $E_\lambda(w)$)

3) Soit V et $\{0_V\}$ les seuls sous-espaces vectorels stables par u, v, w, montrer que $\dim(V) = 1$.

($\Rightarrow$ $\ker(w) = V$ donc $w = 0$
donc u et v commutent, ils ont 1 vecteur propre commun x (stable par u, v)
et $x \neq \{0_V\}$ donc $\mathrm{vect}(x) = V$ $\Rightarrow \dim(V) = 1$)

Exercice 2 : Probas.

Soit une classe d'élèves où 1 nouvel élève arrive chaque jour (jour 1 : 1 élève ...). On considère une suite infinie de jours. Chaque jour, 1 élève est interrogé avec une probabilité uniforme.

1) On s'intéresse au k-ième élève
quelle est la probabilité qu'il soit interrogé ?
(réponse : $P = 1$)
($\Rightarrow$ on note les évènements :
A : l'élève k est interrogé (au moins 1 fois)
A_i : l'élève k est interrogé le jour i.

$$A = \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i$$

$\overline{A} = \bigcap_{i=k}^{\infty} \overline{A_i}$ par indépendance, $P(\overline{A}) = \prod_{i=k}^{\infty} P(\overline{A_i})$

$$\prod_{i=k}^{N} P(\overline{A_i}) = \prod_{i=k}^{N} \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \frac{k-1}{N} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

donc $P(A) = 1$)

2) Quelle est la probabilité que tous les élèves soient interrogés ?
($\Rightarrow$ A_k : l'élève k est interrogé
$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, $\overline{B} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}$ $P(\overline{B}) \leq \sum \underbrace{P(\overline{A_k})}_{=0}$
donc $P(B) = 1$)