Ex 1

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $A + \lambda_i B$ est nilpotente $\forall i \in [\![0, n]\!]$

1) Soit X une matrice d'ordre n
Montrer que son indice de nilpotence est inférieur ou égal à n.

$\longrightarrow$ 0 unique VP

$\longrightarrow P(x) = X^n$ polynôme annulateur

Cayley - Hamilton $\Rightarrow X^n = 0$

donc l'indice de nilpotence est $\leq n$.

2) Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{C}, (A + \lambda B)^n = 0$

~~est~~ $\cancel{\deg((A+\lambda B)^n) \leq n}$

on ~~$\lambda_0, \dots, \lambda_n$ sont $n+1$ racines distinctes de $(A+\lambda B)^n$~~

$$(A + \lambda B)^n = \left(p_{ij}^{(n)}(\lambda) \right)$$

donc $\deg(p_{ij}^{(n)}(\lambda)) \leq n$

on $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ sont $n+1$ racines distinctes de p_{ij} donc p_{ij} est le polynôme nul donc $\forall \lambda \in \mathbb{C}, (A+\lambda B)^n = 0$

En déduire que A et B sont nilpotentes

pour A : On prend $\lambda = 0$ et donc $A^n = 0$

pour B ?

Ex 2

Montrer que

1) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 e^{i\theta} \frac{1-(te^{i\theta})^n}{1-te^{i\theta}} dt$$

Remarquer que $\frac{1-(te^{i\theta})^n}{1-te^{i\theta}} = \sum_{k=0}^{n-1} te^{i\theta}$

et intervertir $\sum$ et $\int$.

2) En déduire que $\sum \frac{e^{ik\theta}}{k}$ CV

et $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-te^{i\theta}} dt$$

Théorème de CV dominée à paramètre continu (on fait tendre n vers $+\infty$ dans l'intégrale)

3) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k} = -\frac{1}{2}\ln(2-2\cos(\theta))$

Prendre la partie réelle de l'équation précédente.

4) Montrer que $\sum_{k\geq 1} \frac{\sin(kx)}{k}$ CV sur $\mathbb{R}$

et que $\forall x \in]0,\pi[$ $\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{1}{2}(x-\pi)}_{\text{plus sur si c'était ça}}$