Ex preparé

$n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 e^{-\frac{1}{t}} t^n \, dt$

1) Montrer que I_n est bien définie. Donner le signe de I_n

2) (a) Etudier les variations de (I_n)

(b) Montrer que (I_n) converge et determiner sa limite.

3) (a) Montrer que $(n+1)I_n + I_{n-1} = e^{-1}$

(b) En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{n}$

4) On pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$

(a) quel est la nature de $\sum I_n$? de $\sum (-1)^n I_n$?

(b) Donner le rayon de convergence de $g(x)$.

5).

Ex pas preparé :

$M \in M_3(\mathbb{R})$.

$M^4 = 4M^2$

2 et -2 sont valeurs propre de M.

1) Montrer que $sp(M) \in \subset \{-2, 0, 2\}$

2) Montrer que M est diagonalisable.