Exercice avec préparation (30 min prep
20 min passage)

~~On~~ Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que M est à diagonale propre si ses coefficients sur la diagonale sont ses valeurs propres comptées avec multiplicité.

1. Donner des exemples de matrices à diagonale propre puis donner une matrice antisymétrique à diagonale propre.

2. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Est-ce A est à diagonale propre?

3. ~~a.~~ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique à diagonale propre.
   a. Quel(s) ~~est~~/sont les valeurs propres de A.
   b. Montrer qu'il existe $p \geq 2$ tq $A^p = 0$
   c. Calculer $(A^T A)^p$. En remarquant que $A^T A$ est symétrique, montrer que $A = 0$

4. Déterminer la dimension de $A_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

5. a. Soit $F \subset \mathcal{E}_n$ avec $\mathcal{E}_n$ les matrices antisymétriques à ~~valeurs~~ diagonale propre.
   Montrer que $\dim(F) \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

   b. déterminer la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_n$.

Exercice sans prep (10min passage)

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2}$$

1. Quelle est l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est continue.
3. Trouver un équivalent (j'ai pas retenu en quel point)