Théorème de Stone-Weierstrass

Le but du problème est de démontrer le théorème de Stone-Weierstrass (qui est est hors-programme). Ce théorème affirme que toute fonction continue sur un segment est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes.

Notation 1 *On note $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note, pour $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ (norme de la convergence uniforme). On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui sont limite uniforme d'une suite de polynômes. Autrement dit, si f est une fonction de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{E}$ si et seulement si il existe une suite (P_n) de polynômes à coefficients réels qui converge uniformément vers f sur le segment $[0,1]$.*

Première partie: Un cas particulier

On définit par récurrence la suite de fonctions (f_n) sur l'intervalle $[0;1]$ par les conditions: $f_0(x) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(x + f_n(x)^2\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$.

1. Justifier que la fonction f_n est polynomiale et que $\forall x \in [0;1]$, $0 \le f_n(x) \le 1$.
2. Justifier que $f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)$ est du même signe que $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. En déduire que la suite de fonctions (f_n) converge simplement. Préciser sa limite f.
3. Justifier que la fonction f_n est croissante. En déduire par récurrence que $f_{n+1}(x) - f_n(x) \le f_{n+1}(1) - f_n(1)$.
4. En déduire que pour tout n, $0 \le f(x) - f_n(x) \le f(1) - f_n(1)$. En déduire la convergence uniforme de la suite (f_n) vers la fonction f.

Deuxième partie: Généralités sur l'ensemble $\mathcal{E}$

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est contenu dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est stable par $\times$, c'est à dire que pour tout couple $(f,g) \in \mathcal{E}^2$, on a $f \times g \in \mathcal{E}$.
4. On définit, pour $a \in [0,1]$, la fonction g_a sur $[0,1]$ par $g_a(x) = |x-a|$.
   (a) Montrer que si $f \in \mathcal{E}$, alors la fonction h définie sur $[0,1]$ par $h(x) = f(1-x)$ appartient à $\mathcal{E}$.
   (b) Pour $b \in [0,1]$ et f une fonction de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note f_b la fonction définie par $f_b(x) = f\left((b-x)^2\right)$. Justifier que cette relation définit bien une fonction sur $[0,1]$ et montrer que si $f \in \mathcal{E}$, alors $f_b \in \mathcal{E}$.
   (c) En déduire que pour tout $a \in [0,1]$, la fonction g_a définie sur $[0,1]$ par $g_a(x) = |x-a|$ est élément de l'ensemble $\mathcal{E}$.

Troisième partie: Fonctions affines par morceaux et continues

On appelle subdivision du segment $[0,1]$ une suite finie $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de réels vérifiant: $a_0 = a, a_n = b$ et pour tout $i \in [0, n-1]_{\mathbb{N}}$, $a_i < a_{i+1}$. Une fonction affine par morceaux continue sur $[0,1]$ associée à la subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est une fonction continue dont la restriction à tout segment $[a_i, a_{i+1}]$ est affine.

1. On considère des réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $g = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i g_{a_i}$. Montrer que g est une fonction affine par morceaux continue associée à la subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Préciser le coefficient directeur de la restriction de g au segment $[a_i, a_{i+1}]$.
2. Montrer qu'une fonction affine par morceaux continue h associée à la subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est entièrement déterminée par $h(0)$ et les valeurs de n coefficients directeurs des restrictions de h aux segments $[a_i, a_{i+1}]$.

3. Justifier que la matrice carrée M suivante de taille $n+1$ est inversible.
$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & & -1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. En déduire que pour toute fonction affine par morceaux continue h associée à la subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $h = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i g_{a_i}$.

Quatrième partie: Conclusion

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.

1. Montrer que toute fonction affine par morceaux continue sur $[0,1]$ appartient à $\mathcal{E}$.

2. On admet le résultat suivant: Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall (x, x') \in [0,1]^2$, $|x - x'| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
Montrer qu'il existe une fonction affine par morceaux continue h sur $[0,1]$ vérifiant $\|f - h\|_\infty < \varepsilon$.

3. Déduire des questions 1 et 2 que $f \in \mathcal{E}$.

4. application: théorème des moments: On suppose que f et g sont des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^n f(t)\, dt = \int_0^1 t^n g(t)\, dt$.

   (a) Montrer que pour tout polynôme P, on a $\int_0^1 P(t)\,(f - g)(t)\, dt = 0$.

   (b) En déduire que $f = g$.

Correction:

Première partie: Un cas particulier

On définit par récurrence la suite de fonctions (f_n) sur l'intervalle $[0;1]$ par les conditions: $f_0(x) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(x + f_n(x)^2\right)$.

1. Récurrence.

2. Soit $x \in [0,1]$ fixé. On a $f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(f_{n+1}^2(x) - f_n(x)^2\right) = \frac{1}{2}\left(f_{n+1}(x) + f_n(x)\right)\left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)$ du même signe que $\left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)$ car $f_i(x) \geq 0$ On a $f_1(x) = \frac{x}{2} \geq f_0(x)$ donc $f_1(x) - f_0(x) \geq 0$ donc $\forall n$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$ d'après ce qui précède. La suite $(f_n(x))$ est croissante et majorée par 1 donc converge et, par passage à la limite dans la relation de récurrence, sa limite l vérifie $l = \frac{1}{2}\left(x + l^2\right)$ soit $l^2 - 2l + x = 0$. On a donc $l = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4x}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-x}$. Or $l \in [0,1]$ car $f_n(x) \in [0,1]$ donc $l = 1 - \sqrt{1-x}$. On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto 1 - \sqrt{1-x}$.

3. La fonction f_0 est constante donc croissante Supposons f_n croissante et soit x et y, $0 \leq x \leq y \leq 1$. On a $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(x + f_n(x)^2\right) \leq \frac{1}{2}\left(y + f_n(y)^2\right) = f_{n+1}(y)$ car f_n est croissante donc f_{n+1} est croissante. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est croissante.
   Montrons par récurrence que $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq f_{n+1}(1) - f_n(1)$. Pour $n = 0$, On a $f_1(x) - f_0(x) = f_1(x) \leq f_1(1) = f_1(0) - f_1(0)$.
   Supposons la propriété vraie pour n. On a $f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(f_{n+1}^2(x) - f_n(x)^2\right) = \frac{1}{2}\left(f_{n+1}(x) + f_n(x)\right)\left(f_{n+1}(x) - f_n\right.$
   $\frac{1}{2}\left(f_{n+1}(1) + f_n(1)\right)\left(f_{n+1}(1) - f_n(1)\right) = f_{n+2}(1) - f_{n+1}(1)$ ce qui termine la récurrence.

4. La suite $(f_n(x))$ étant croissante et de limite $f(x)$, on $f_n(x) \leq f(x)$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on a $f_{n+p}(x) - f_n(x) = \sum\limits_{k=n}^{n+p-1} f_{k+1}(x) - f_k(x) \leq \sum\limits_{k=n}^{n+p-1} f_{k+1}(1) - f_k(1) \leq f_{n+p}(1) - f_n(1)$. En passant à la limite lorsque p tend vers $+\infty$, on obtient que $f(x) - f_n(x) \leq f(1) - f_n(1)$. On a donc $|f(x) - f_n(x)| \leq f(1) - f_n(1)$ et donc $\|f_n - f\|_\infty = f(1) - f_n(1)$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} f(1) - f_n(1)$ d'après Q2 donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ donc la suite (f_n) convergence uniformément vers la fonction f.

Deuxième partie: Généralités sur l'ensemble $\mathcal{E}$

Remarque *Les questions 2 et 3 de cette partie reprennent un exercice du cours en utilisant les propriétés de la norme infinie vue en cours, ce qui abrège la rédaction. Toutes les fonctions intervenant dans ces questions étant continues sur* $[0,1]$ *sont donc bornées sur*$[0,1]$.

1. Soit $f \in \mathcal{E}$. Il existe une suite (P_n) de polynômes à coefficients réels qui converge uniformément vers f sur le segment $[0,1]$.
   Les fonctions P_n sont continues sur $[0,1]$ donc f est continue sur $[0,1]$. On a donc $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

2. On a $\mathcal{E} \neq \emptyset$. Soit $(f,g) \in \mathcal{E}^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ Il existe une suite (P_n) (respectivement (Q_n)) de polynômes à coefficients réels qui converge uniformément vers f (vers g) sur le segment $[0,1]$.Les fonctions $\lambda f + \mu g$ et $\lambda P_n + \mu Q_n$ sont continues donc bornées et $\|(\lambda f + \mu g) - (\lambda P_n + \mu Q_n)\|_\infty = \|\lambda(f - P_n) + \mu(g - Q_n)\|_\infty \leq \|\lambda(f - P_n)\|_\infty + \|\mu(g - Q_n)\|_\infty = |\lambda| \|f - P_n\|_\infty + \mu \|g - Q_n\|_\infty \to_{n\to+\infty} 0$ donc la suite de polynômes $(\lambda P_n + \mu Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda f + \mu g$ qui est donc élément de $\mathcal{E}$ donc $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

3. Avec les mêmes notations, $\|fg - P_nQ_n\|_\infty = \|fg - fQ_n + fQ_n - P_nQ_n\|_\infty = \|f(g - Q_n) + Q_n(f - P_n)\|_\infty \leq \|f(g - Q_n)\|_\infty + \|Q_n(f - P_n)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g - Q_n\|_\infty + \|Q_n\|_\infty \|f - P_n\|_\infty$ car $\|u \times v\|_\infty \leq \|u\|_\infty \|v\|_\infty$ (car $|uv(x)| \leq \|u\|_\infty \|v\|_\infty$) Or $\|Q_n\|_\infty = \|Q_n - g + g\|_\infty \leq \|Q_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \to_{n\to+\infty} \|g\|_\infty$ et $\|g - Q_n\|_\infty \to_{n\to+\infty} 0$ et $\|f - P_n\|_\infty \to_{n\to+\infty} 0$ donc $\|fg - P_nQ_n\|_\infty \to_{n\to+\infty} 0$. Le produit de polynôme étant un polynôme, $f \times g$ est donc limite uniforme de la suite de polynômes (P_nQ_n) donc $f \times g \in \mathcal{E}$.

4. On pose $g_a(x) = |x - a|$.

   (a) Avec les mêmes notations, On pose $Q_n(x) = P_n(1 - x)$. La fonction Q_n est polynômiale car P_n l'est et $\|Q_n - h\|_\infty \leq \|P_n - f\|_\infty$ car si $x \in [0,1]$ alors $1 - x \in [0,1]$. On en déduit que h est limite uniforme de la suite de polynômes Q_n sur $[0,1]$ donc h appartient à $\mathcal{E}$.

(b) Si $b \in [0,1]$ alors pour tout $x \in [0,1]$, $-1 \leq b-1 \leq b-x \leq b \leq 1$ donc $0 \leq (b-x)^2 \leq 1$ donc f_b est bien définie sur $[0,1]$. à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note f_b la fonction définie par $f_b(x) = f\left((b-x)^2\right)$. En posant $R_n(x) = P_n\left((b-x)^2\right)$, on montre comme dans a que $f_b \in \mathcal{E}$.

(c) Posons $k(x) = 1 - \sqrt{1-x}$. D'aprés la première partie, $k \in \mathcal{E}$ donc $l = -(k-1) \in \mathcal{E}$ d'après la Q1. La fonction l est définie par $l : x \mapsto \sqrt{1-x}$ et d'après Q2, $f : x \mapsto \sqrt{x}$ appartient à $\mathcal{E}$. Or $g_a(x) = |x-a| = \sqrt{(x-a)^2} = f\left((x-a)^2\right)$ donc d'après Q3b, $g_a \in \mathcal{E}$.

Troisième partie: Fonctions affines par morceaux et continues

On appelle subdivision du segment $[0,1]$ une suite finie $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de réels vérifiant: $a_0 = a, a_n = b$ et pour tout $i \in [0, n-1]_{\mathbb{N}}$, $a_i < a_{i+1}$. Une fonction affine par morceaux continue sur $[0,1]$ associée à la subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est une fonction continue dont la restriction à tout segment $[a_i, a_{i+1}]$ est affine.

1. La fonction g est continue car les g_{a_i} le sont. Si $x \in [a_i, a_{i+1}]$, $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k g_{a_k}(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_k (x - a_k) - \sum\limits_{k=i+1}^{n} \lambda_k (x - a_l)$ donc g est affine sur $[a_i, a_{i+1}]$ et de coefficient directeur $\sum\limits_{i=0}^{i} \lambda_k - \sum\limits_{k=i+1}^{n} \lambda_k$ sur cet intervalle donc g est une fonction affine par morceaux continue associée à la subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

2. Soit une fonction affine par morceaux continue h associée à la subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.
La valeur de $h(0)$ et du coefficient directeur de la restriction de h à segment $[a_0, a_1]$ détermine la restriction de h à $[a_0, a_1]$ (et donc $h(a_1)$).
La valeur de $h(a_1)$ et du coefficient directeur de la restriction de h à segment $[a_1, a_2]$ détermine la restriction de h à $[a_1, a_2]$ (et donc $h(a_2)$).
et ainsi de suite donc h est entièrement déterminée par $h(0)$ et les valeurs de n coefficients directeurs des restrictions de h aux segments $[a_i, a_{i+1}]$.

3. Les combinaisons $L_i \leftarrow L_i + L_{i-1}$ font passer de M à $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 0 \end{pmatrix}$. En développant par rapport à la dernière colonne, on a $\det(M_1) = (-1)^{n+2} a_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{n+2} 2^{n-1} a_n \neq 0$ donc M est inversible.

4. Soit h une fonction affine par morceaux continue associée à la subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. On note c_i le coefficient directeur de h sur $[a_i, a_{i+1}]$. Posons, pour $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ réels, $h_1 = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i g_{a_i}$. D'après Q1 et 2, on a $h = h_1$ si et seulement si $h(0) = h_1(0)$ et $\forall i \in [0, n-1]$, $c_i = \sum\limits_{i=0}^{i} \lambda_k - \sum\limits_{k=i+1}^{n} \lambda_k$, c'est-à-dire $\begin{cases} h(0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k a_k \\ c_0 = \lambda_0 - \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \\ c_1 = \lambda_0 + \lambda_1 - \sum\limits_{k=2}^{n} \lambda_k \\ \vdots \\ c_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k - \lambda_n \end{cases}$
soit $\begin{pmatrix} h(0) \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. La matrice M étant inversible, on en déduit qu'il existe un et un seul $\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

tel que $\begin{pmatrix} h(0) \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ c'est-à-dire telle que $h = h_1$.

Quatrième partie: Conclusion

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.
On admet provisoirement dans les questions 1 et 2 le résultat suivant:
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction affine par morceaux continue h sur $[0,1]$ vérifiant $\|f-h\|_\infty < \varepsilon$.
On fixe un réel $\varepsilon > 0$

1. Toute fonction affine par morceaux continue sur $[0,1]$ est combinaison linéaire de fonctions g_a qui appartienent à $\mathcal{E}$ donc, d'après III1, appartient à $\mathcal{E}$.

2. Soit $\varepsilon > 0$, et $\alpha > 0$ tel que $\forall (x,x') \in [0,1]^2$, $|x-x'| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Soit $n = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor + 1$ (donc $\frac{1}{n} < \alpha$) et $a_i = \frac{i}{n}$. Soit h la fonction affine par morceaux sur $[0,1]$ continue associée à la subdivision $(a_i)_{0 \le i \le n}$ et qui vérifie $\forall i$, $f(a_i) = h(a_i)$.
   Si $x \in [a_i, a_{i+1}]$, alors $\min(f(a_i), f(a_{i+1})) \le h(x) \le \max(f(a_i), f(a_{i+1}))$ donc $\min(f(a_i), f(a_{i+1})) - f(x) \le h(x) - f(x) \le \max(f(a_i), f(a_{i+1})) - f(x)$ donc $-\varepsilon \le h(x) - f(x) \le +\varepsilon$ donc $\|h-f\|_\infty \le \varepsilon$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. il existe une fonction affine par morceaux continue h sur $[0,1]$ vérifiant $\|f-h\|_\infty < \frac{1}{2n}$ et $h \in \mathcal{E}$ donc h est limite uniforme d'une suite de polynômes (Q_n) donc il existe un polynôme Q_{k_n} tel que $\|h - Q_{k_n}\|_\infty < \frac{1}{2n}$ donc tel que $\|f - Q_{k_n}\|_\infty = \|f - h + h - Q_{k_n}\|_\infty \le \|f-h\|_\infty + \|h - Q_{k_n}\|_\infty < \frac{1}{n}$ Posons $P_n = Q_{k_n}$. On a donc $\|f - P_n\|_\infty < \frac{1}{n}$. La suite de polynôme (P_n) converge uniformément vers f donc $f \in \mathcal{E}$.

4. On a $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall a_i \in \mathbb{R}$, $\int_0^1 a_i t^i f(t)\, dt = \int_0^1 a_i t^i g(t)\, dt$.

   (a) Soit $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$. On a $\forall i \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 t^i f(t)\, dt = \int_0^1 t^i g(t)\, dt$ donc $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \int_0^1 t^i f(t)\, dt = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \int_0^1 t^i g(t)\, dt$ soit, par linéarité de $\int$, $\int_0^1 \left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i t^i \right) (f(t) - g(t))\, dt$. soit $\int_0^1 P(t)(f-g)(t)\, dt = 0$.

   (b) Soit (P_n) une suite de polynômes qui converge uniformément vers la fonction continue $f-g$ sur $[0,1]$. On a $\int_0^1 P_n(t)(f-g)(t)\, dt = 0$ et la suite de fonctions $(P_n(f-g))$ converge uniformément vers $(f-g)^2$ (copier la démonstration de II3) donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 P_n(t)(f-g)(t)\, dt = \int_0^1 (f-g)^2(t)\, dt$. Or $(f-g)^2$ est positive et continue donc est nulle donc $f = g$.

5. Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ continue. Posons $g(t) = f(a + (b-a)t)$. La fonction g est définie et continue sur $[0,1]$ donc il existe (P_n) suite de polynômes convergeant uniformément sur $[0,1]$ vers g. On a $f(x) = g\left(\dfrac{x-a}{b-1}\right)$. Posons $Q_n(x) = P_n\left(\dfrac{x-a}{b-1}\right)$. On a $\sup_{t \in [0,1]} |g(t) - P_n(t)| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - Q_n(x)|$ donc la suite de polynôme (Q_n) converge uniformément vers f.