# DM 2, pour lundi 16/9/24

## Exercice 1: Existence et calcul d'intégrales généralisées

### .1 Premier exemple

**Q 1** *Justifiez que l'intégrale généralisée* $I = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$ *converge.*

**Q 2** *Effectuer le changement de variable* $u = \sqrt{t}$ *dans l'intégrale* $I$*.*

**Q 3** *En déduire la valeur de* $I$*.*

### .2 Deuxième exemple

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale généralisée $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$.

**Q 4** *Montrer que , pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, l'intégrale généralisée* $I_n$ *converge.*

**Q 5** *Préciser la valeur de* $I_1$*.*
*Dans la suite* $n$ *est un entier supérieur ou égal à* $2$*.*

**Q 6** *Montrer que* $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^n}dt = \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}$*.*

**Q 7** *En déduire que* $I_n = \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$*.*

**Q 8** *En déduire une expression de* $I_n$*.sous forme de produits et de quotients.*

**Q 9** *En déduire que* $I_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}\frac{\pi}{2}$*.*
*Indication: si on a réussi la question précédente, on essaiera trouver l'expression de* $I_n$ *"sans la connaître" et sinon, on pourra utiliser une récurrence.*

## Exercice 2:

**Q 10** *Pour* $x \in \mathbb{R}^*$*, on pose* $\varphi(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$*. Justifier que* $\varphi$ *est dérivable et calculer* $\varphi'(x)$*. En déduire que* $\forall x \in ]0, +\infty[$, $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}$*. Préciser la valeur de* $\varphi(x)$ *pour* $x < 0$*.*

**Q 11** *Justifier que la série* $\sum \frac{1}{1+n^2}$ *est convergente.*

**Q 12** *On pose, pour* $n \geq 1$*,* $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$*. On se propose de donner un équivalent de* $R_n$ *en* $+\infty$*.*

1. *Montrer que si* $p \geq n+2$ *alors* $\int_{n+1}^{p+1} \frac{1}{1+t^2}dt \leq \sum\limits_{k=n+1}^{p} \frac{1}{1+k^2} \leq \int_n^p \frac{1}{1+t^2}dt$*.*

2. *En déduire que* $\frac{\pi}{2} - \arctan(n+1) \leq R_n \leq \frac{\pi}{2} - \arctan(n)$*. Montrer que* $R_n \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$*.*

## Exercice 3:

On pose, pour tout entier naturel $n$, $C_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$ et $D_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x$.

**Q 13** *Établir, pour tout entier naturel $n$ non nul, l'égalité : $C_n = (2n-1)(C_{n-1} - C_n)$.*
*On pourra écrire $\cos^{2n}(x) = \cos(x)\cos^{2n-1}(x)$ et effectuer une intégration par parties.*

**Q 14** *Établir, pour tout entier naturel $n$ non nul, les égalités:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{C_n}{2n-1} = \frac{C_{n-1}}{2n}$$

**Q 15** *A l'aide d'intégrations par parties, établir pour tout entier naturel $n$ non nul, l'égalité:*

$$C_n = (2n-1)nD_{n-1} - 2n^2 D_n.$$

**Q 16** *En déduire, pour tout entier $n$ non nul, l'égalité:* $\dfrac{1}{n^2} = 2\left(\dfrac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \dfrac{D_n}{C_n}\right)$

**Q 17** *Justifier, pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la minoration :* $\sin(x) \geqslant \dfrac{2}{\pi}x$.

**Q 18** *En déduire, pour tout entier naturel $n$, la majoration :* $D_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\dfrac{C_n}{2n+2}$.

**Q 19** *Prouver l'égalité :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

## Exercice 4: Facultatif

Etudier la nature de la série $\sum \dfrac{\cos(\ln(k))}{k}$ (on pourra considérer $S_{v_n} - S_{u_n}$ ou $u_n$ et $v_n$ sont des entiers bien choisis).

# Correction DM 2

## I Exercice 1:

**R 1** *La fonction* $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ *est continue sur* $[0, +\infty[$.

*On a* $\dfrac{e^{-\sqrt{t}}}{1/t^2} = t^2 e^{-\sqrt{t}} = \left(\sqrt{t}\right)^4 e^{-\sqrt{t}}$. *Posons* $X(t) = \sqrt{t}$. *On a* $\lim\limits_{t \to +\infty} X(t) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{X \to +\infty} X^4 e^{-X} = 0$ *donc par composition des limites* $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 e^{-\sqrt{t}} = 0$.

*On en déduit que* $e^{-\sqrt{t}} = o_{t \to +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. *De plus* $\frac{1}{t^2} \geq 0$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ *converge donc* $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$ *converge absolument donc converge.*

**R 2** *La fonction* $t \mapsto \sqrt{t}$ *est de classe* $C^1$ *strictement croissant sur* $]0, +\infty[$ *et induit une bijection sur* $]0, +\infty[$ *donc*

$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} 2\sqrt{t} e^{-\sqrt{t}} \times \dfrac{1}{2\sqrt{t}} dt = \int_{\lim\limits_{t \to 0} u(t)}^{\lim\limits_{t \to +\infty} u(t)} 2u e^{-u} du = 2 \int_0^{+\infty} u e^{-u} du.$

**R 3** *Par IPP avec* $\begin{cases} v(u) = u & w'(u) = e^{-u} \\ v'(u) = 1 & w(u) = -e^{-u} \end{cases}$ *, du fait que* $\lim\limits_{u \to +\infty} v(u) w(u) = 0 : (C.C)$, *on a*

$\int_0^{+\infty} u e^{-u} du = [v(u) w(u)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-u} du = 1$ *donc* $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt = 2$.

**R 4** *La fonction* $f : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ *est définie et continue sur* $[0, +\infty[$.

*De plus* $f(t) \sim_{t \to +\infty} \dfrac{1}{t^{2n}} \geq 0$ *avec* $2n \geq 2 > 1$ *donc* $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^{2n}} dt$ *converge donc* $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ *converge donc* $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ *converge.*

**R 5** $I_1 = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^{t \to +\infty} = \dfrac{\pi}{2}$.

**R 6** *IPP dans* $\int_0^{+\infty} \dfrac{t^2}{(1+t^2)^n} dt$ *(sous réserve de convergence) avec* $\begin{cases} u(t) = \dfrac{t}{2} & \dfrac{1}{2} \\ v(t) = \dfrac{1}{-(n-1)} \dfrac{1}{(1+t^2)^{n-1}} & v'(t) = \dfrac{2t}{(1+t^2)^n} \end{cases}$

*On a* $n \geq 2$ *donc* $n - 1 \geq 1$ *donc* $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) v(t) = 0$ *donc*

$\int_0^{+\infty} \dfrac{t^2}{(1+t^2)^n} dt = [u(t) v(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} dt = \dfrac{1}{2(n-1)} I_{n-1}$ *et comme l'intégrale généralisée converge, on en déduit que* $\int_0^{+\infty} \dfrac{t^2}{(1+t^2)^n} dt$ *converge.*

**R 7** *Or* $I_n + \int_0^{+\infty} \dfrac{t^2}{(1+t^2)^n} dt = \int_0^{+\infty} \dfrac{1+t^2}{(1+t^2)^n} dt = I_{n-1}$ *donc* $I_n + \dfrac{1}{2(n-1)} I_{n-1} = I_{n-1}$ *donc* $I_n = \dfrac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$.

**R 8** *On a donc* $I_n = \dfrac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} = \dfrac{2n-3}{2n-2} \times \dfrac{2n-5}{2n-4} I_{n-2} = \dfrac{2n-3}{2n-2} \times \dfrac{2n-5}{2n-4} \times \dfrac{2n-7}{2n-6} I_{n-3} = \cdots = \dfrac{2n-3}{2n-2} \times \dfrac{2n-5}{2n-4} \times \dfrac{2n-7}{2n-6} \times \cdots \times \dfrac{1}{2} I_1$.

*On a donc* $I_n = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (2k-1)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} 2k} \dfrac{\pi}{2}$.

**R 9** *Or* $\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)\times\prod_{k=1}^{n-1}2k=(2n-2)!$ *et* $\prod_{k=1}^{n-1}2k=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}k=2^{n-1}\times(n-1)!$ *donc* $I_n=\dfrac{\dfrac{(2n-2)!}{2^{n-1}\left(n-1\right)!}}{2^{n-1}\left(n-1\right)!}\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-2}\left((n-1)!\right)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

# Exercice 2 :

**R 10** *Soit* $\varphi(x)=\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$*:* $\varphi$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$, $\varphi'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-1}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=0$. *La fonction* $\varphi$ *est donc constante sur* $]-\infty,0[$ *et constante sur* $]0,+\infty[$. *Or* $\varphi(1)=\dfrac{\pi}{2}$ *et* $\varphi(1)=-\dfrac{\pi}{2}$ *donc si* $x>0$ *alors* $\varphi(x)=\dfrac{\pi}{2}$ *et si* $x<0$ *alors* $\varphi(x)=-\dfrac{\pi}{2}$.

**R 11** $\frac{1}{1+n^2}\sim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}$ *et la SATP* $\sum\frac{1}{n^2}$ *converge donc la série* $\sum\frac{1}{1+n^2}$ *est convergente.*

**R 12** *Equivalent de* $R_n$*:*

1. *Soit* $k\geq 1$ *et* $t\in[k-1,k]$. *On a* $1+(k-1)^2\leq 1+t^2\leq 1+k^2$ *donc* $\dfrac{1}{1+k^2}\leq\dfrac{1}{1+t^2}\leq\dfrac{1}{1+(k-1)^2}$ *d'où* $\dfrac{1}{1+k^2}(k-(k-1))\leq\int_{k-1}^{k}\dfrac{1}{1+t^2}dt\leq\dfrac{1}{1+(k-1)^2}(k-(k-1))$ *soit* $\dfrac{1}{1+k^2}\leq\int_{k-1}^{k}\dfrac{1}{1+t^2}dt\leq\dfrac{1}{1+(k-1)^2}$. *En remplaçant* $k$ *par* $k+1$ *dans la deuxième inégalité, on obtient* $\int_{k}^{k+1}\dfrac{1}{1+t^2}dt\leq\dfrac{1}{1+k^2}$ *donc* $\int_{k}^{k+1}\dfrac{1}{1+t^2}dt\leq\dfrac{1}{1+k^2}\leq\int_{k-1}^{k}\dfrac{1}{1+t^2}dt$ *donc* $\sum_{k=n+1}^{p}\int_{k}^{k+1}\dfrac{1}{1+t^2}dt\leq\sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{1+k^2}\leq\sum_{k=n+1}^{p}\int_{k-1}^{k}\dfrac{1}{1+t^2}dt$ *d'où* $\int_{n+1}^{p+1}\frac{1}{1+t^2}dt\leq\sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{1+k^2}\leq\int_{n}^{p}\frac{1}{1+t^2}dt$.
2. *L'encadrement précédent équivaut à* $\arctan(p+1)-\arctan(n+1)\leq R_n\leq\arctan(p)-\arctan(n)$ *et* $R_n=\lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{1+k^2}\right)$ *et* $\lim_{p\to+\infty}\arctan(p+1)=\lim_{p\to+\infty}\arctan(p)=\dfrac{\pi}{2}$ *donc, en passant à la limite,*
$$\frac{\pi}{2}-\arctan(n+1)\leq R_n\leq\frac{\pi}{2}-\arctan(n).$$
*La question 1 permet d'en déduire que* $\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\leq R_n\leq\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$. *Or* $\arctan(x)\sim_{x\to0}x$ *donc* $\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)\sim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}$ *et* $\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\sim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}$ *donc* $R_n\sim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}$.

# Exercice 3 : un calcul de $\zeta(2)$

**R 13** *Soit* $n\in\mathbb{N}$. $C_{n-1}-C_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2(x))cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x$.
*On a* $C_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(x)\cos^{2n-1}(x)\,\mathrm{d}x$. *On effectue une intégration par parties :*

$$u(x)=\sin(x),\quad u'(x)=\cos(x),\quad v(x)=\cos^{2n-1}(x)\sin(x),\quad v'(x)=-(2n-1)\sin(x)\cos^{2n-2}(x)$$

*et l'on obtient* $C_n=\left[\dfrac{x^2}{2}\cos^{2n}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(2n-1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)\mathrm{d}x=(2n-1)(C_{n-1}-C_n)$.

**R 14** *Or* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x = C_{n-1} - C_n$ *donc* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) cos^{2n-2}(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{C_n}{2n-1}$ *d'après la question précédente. L'égalité* $C_n = (2n-1)(C_{n-1} - C_n)$*.entraîne que* $(2n) C_n = (2n-1) C_{n-1}$ *donc* $\dfrac{C_n}{2n-1} = \dfrac{C_{n-1}}{2n}$*, d'où le résultat.*

**R 15** *On intègre par parties (en intégrant* $1$ *et dérivant* $\cos^{2n}(x)$*):*
$C_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x = C_n = \left[x\cos^{2n}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2nx\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\ \mathrm{d}x = 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\ \mathrm{d}x.$
*On intègre par parties (en intégrant* $x$ *et dérivant* $\sin(x)\cos^{2n-1}(x)$*):*
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\cos^{2n-1}(x)\ \mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^2}{2}\cos^{2n}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x^2}{2}\left(\cos^{2n}(x) - (2n-1)\sin^2(x)\cos^{2n-2}(x)\right)\ \mathrm{d}x$
*or* $\cos^{2n}(x) - (2n-1)\sin^2(x)\cos^{2n-2}(x) = \cos^{2n}(x) - (2n-1)(1-\cos^2(x))\cos^{2n-2}(x)$
$= 2n\cos^{2n}(x) - (2n-1)\cos^{2n-2}(x)$.
*On en déduit que* $C_n = n(2n-1)D_{n-1} - 2n^2 D_n$.

**R 16** *On en déduit que* $\dfrac{C_n}{n^2} = \dfrac{2n-1}{n}D_{n-1} - 2D_n$ *et comme* $C_n > 0$ *car* $x \mapsto \cos^{2n}(x)$ *est positive continue et n'est pas la fonction nulle sur* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$*, on a* $C_n \neq 0$ *donc* $\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{2n-1}{n}\dfrac{D_{n-1}}{C_n} - 2\dfrac{D_n}{C_n}$*. Or* $C_n = \dfrac{(2n-1)C_{n-1}}{2n}$ *d'après la deuxième question donc* $\dfrac{1}{n^2} = 2\left(\dfrac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \dfrac{D_n}{C_n}\right)$.

**R 17** *Première méthode: Soit* $u : \begin{cases} [0,\pi/2] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \sin(x) \end{cases}$ *est de classe* $C^2$ *et* $u''(x) = -\sin(x) \leq 0$ *donc* $u$ *est concave. Si* $O = (0, \sin(0)) = (0,0)$ *et* $A = (\pi/2, \sin(\pi/2)) = (\pi/2, 1)$*, la corde* $[O, A]$ *est donc au dessous de la courbe donc* $\sin(x) \geq \dfrac{2}{\pi}x$.
*Deuxième méthode:*
*Posons* $f(x) = \sin(x) - \dfrac{2}{\pi}x$*. La fonction* $f$ *est de classe* $C^\infty$ *et* $f'(x) = \cos(x) - \dfrac{2}{\pi}$ *et* $f''(x) = -\sin(x) < 0$ *sur* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
*La fonction* $f'$ *est strictement décroissante et* $f'(0) = 1 - \dfrac{2}{\pi} > 0$ *et* $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{2}{\pi} < 0$*. La fonction* $f'$ *est continue donc* $\exists c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
*On a donc les variations:*

| $x$ | $0$ | | $c$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $0$ |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

*. La fonction* $f$ *est donc positive sur l'intervalle* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *d'où le résultat.*

**R 18** *On a donc* $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\sin(x)$ *donc* $0 \leq x^2 \leq \dfrac{\pi^2}{4}\sin^2(x)$ *donc* $D_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos^{2n}(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi^2}{4}\dfrac{C_n}{2n+2}$ *(daprès Q2).*

**R 19** *On déduit de l'inégalité précédente que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{D_n}{C_n} = 0$.
*Posons* $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n^2}$*. On a* $\dfrac{1}{n^2} = 2\left(\dfrac{D_{n-1}}{C_{n-1}} - \dfrac{D_n}{C_n}\right)$ *et on obtient* $S_N = 2\left(\dfrac{D_0}{C_0} - \dfrac{D_N}{C_N}\right)$ *après télescopage. En passant à la limite quand* $N$ *tend vers* $+\infty$*, on obtient*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2\frac{D_0}{C_0} = \frac{\pi^2}{6}.$$

*car* $C_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ *et* $D_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3}$.

# Exercice 4:

La fonction ln a une croissance lente. On va donc avoir, pour $k$ grand, de nombreux termes consécutifs de même signe.
Posons $a_n = e^{2n\pi - \pi/3}$ et $b_n = e^{2n\pi - \pi/3}$ et $u_n = \lfloor a_n \rfloor$ et $v_n = \lfloor b_n \rfloor - 1$.
Pour tout $k \in [1 + u_n, v_n]$, on a $2n\pi - \pi/3 \leq \ln(k) \leq 2n\pi + \pi/3$ donc $\cos(\ln(k)) \geq \dfrac{1}{2}$.
On en déduit que $S_{v_n} - S_{u_n} = \sum\limits_{u_{n+1}}^{v_n} \dfrac{\cos(\ln(k))}{k} \geq \dfrac{1}{2} \sum\limits_{u_{n+1}}^{v_n} \dfrac{1}{k} \geq \dfrac{v_n - u_n}{2v_n}$.
Or $u_n = e^{2n\pi - \pi/3} + O_{n \to +\infty}(1)$ et $v_n = e^{2n\pi + \pi/3} + O_{n \to +\infty}(1)$ donc
$v_n - u_n = e^{2n\pi + \pi/3} - e^{2n\pi - \pi/3} + O_{n \to +\infty}(1) = e^{2n\pi + \pi/3}\left(1 - e^{-2\pi/3}\right) + O_{n \to +\infty}(1) \sim_{n \to +\infty} e^{2n\pi + \pi/3}\left(1 - e^{-2\pi/3}\right)$
et $v_n \sim_{n \to +\infty} e^{2n\pi + \pi/3}$. On en déduit que $\dfrac{v_n - u_n}{2v_n} \sim_{n \to +\infty} \left(1 - e^{-2\pi/3}\right)$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_n - u_n}{2v_n} = \left(1 - e^{-2\pi/3}\right) > 0$.
Si la série $\sum \dfrac{\cos(\ln(k))}{k}$ convergeait, on aurait $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{v_n} - S_{u_n} = 0$,
ce qui contredit $S_{v_n} - S_{u_n} \geq \dfrac{v_n - u_n}{2v_n} \to_{n \to +\infty} \left(1 - e^{-2\pi/3}\right) > 0$ donc la série diverge.