PSI DS 1 (le mercredi 13 septembre 2023)

Le sujet comporte 4 pages

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Questions proches du cours

Cours1: Montrer que la série $\sum \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ est absolument convergente.

Cours2: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ définie par $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$.
Justifier que f est de classe C^∞ et calculer $f^{(n)}(x)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

Cours 3: Soit $a>0$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n=\dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$.

Cours 4: Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}$ en la comparant avec une série de Riemann.

Cours 5: Soit f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G.
Montrer que $g\circ f=0\Leftrightarrow \operatorname{Im}(f)\subset\ker(g)$.

Cours 6: Montrer que l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{x} \text{ si } x\neq 0\\ 1 \text{ si } x=0\end{cases}$

Q 1 *Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x\neq 0$.*

Q 2 *Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.*

Q 3 *Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.*

Q 4 *Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f''(x)$ pour $x\neq 0$.*

Q 5 *Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 2

Q 6 *Pour* $x \in \mathbb{R}^*$, *on pose* $\varphi(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. *Justifier que* φ *est dérivable et calculer* $\varphi'(x)$. *En déduire une expression simplifiée de* $\varphi(x)$.

Q 7 *Justifier que la série* $\sum \frac{1}{1+n^2}$ *est convergente.*

On pose, pour $n \geq 1$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$. On se propose de donner un équivalent de R_n en $+\infty$.

Q 8 *Montrer que si* $p \geq n+2$ *alors* $\int_{n+1}^{p+1} \frac{1}{1+t^2} dt \leq \sum\limits_{k=n+1}^{p} \frac{1}{1+k^2} \leq \int_n^p \frac{1}{1+t^2} dt$.

Q 9 *En déduire que* $\dfrac{\pi}{2} - \arctan(n+1) \leq R_n \leq \dfrac{\pi}{2} - \arctan(n)$.

Q 10 *Montrer que* $R_n \sim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 3

Soit $\alpha > 0$. On pose $u_n = \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$

Q 11 *On suppose* $\alpha < \dfrac{1}{2}$. *Déterminer la nature de la série* $\sum u_n$.

Q 12 *On suppose* $\alpha > \dfrac{1}{2}$. *Déterminer la nature de la série* $\sum u_n$.

Exercice 4

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{1}{i! \times 2^{n-i}}$.

Q 13 *Montrer que la série* $\sum w_n$ *converge absolument et préciser sa somme.*

Problème:

Première partie: Etude d'une fonction

On considère un réel $x > 0$.

Q 14 *Montrer que la série* $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ *converge.*

On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

Q 15 *Justifier que* $0 \leq S(x) \leq \frac{1}{x}$.

Q 16 *Etablir l'égalité* $(\mathcal{E})$:

$$S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x}$$

Etude de la fonction S:

Q 17 *On considère* $y > 0$*. Montrer que* $S(y) - S(x) = (x-y) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+x)(n+y)}$.

Q 18 *En déduire le sens de variation de la fonction* S.

Q 19 *Soit* $a > 0$*. Montrer que la fonction* S *est lipschitzienne sur* $[a, +\infty[$
(c'est-à-dire qu'il existe un réel K *tel que pour tout* $(x, y) \in [a, +\infty[^2$, $|S(y) - S(x)| \leq K|y - x|$*).*

Q 20 *En déduire que la fonction* S *est continue sur* $]0, +\infty[$.

Q 21 *Montrer que* $S(x) \sim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$.

Q 22 *Montrer que* $S(x) \sim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2x}$*. On pourra commencer par encadrer* $S(x)$ *en utilisant l'égalité* $(\mathcal{E})$.

Deuxième partie: Calcul de S(1), somme de la série harmonique alternée

On pose pour $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $g_n(t) = \dfrac{1}{1+t} - \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k t^k$.

Q 23 *Montrer que* $|g_n(t)| \leq t^{n+1}$.

Q 24 *On pose* $u_n = \int_0^1 g_n(t)\, dt$*. Montrer que la suite* (u_n) *converge vers* 0.

Q 25 *En déduire que* $S(1) = \ln(2)$.

Q 26 *On pose* $S_n(1) = \sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{(-1)^i}{i+1}$*. Donner un entier* n_0 *à partir duquel* $|\ln(2) - S_n(1)| \leq 10^{-2}$.

Q 27 *Montrer que* $S(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(2) + o_{x \to 0}(1)$.

Troisième partie: Réarrangement de la série harmonique alternée, réarrangement d'une série à termes positifs

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{3n} = \dfrac{1}{2n+1}$, $v_{3n+1} = \dfrac{-1}{4n+2}$ et $v_{3n+2} = \dfrac{-1}{4n+4}$ et $T_n = \sum\limits_{i=0}^{n} v_i$.

Q 28 *Montrer que la suite* (T_{3n+2}) *converge vers* $\dfrac{\ln(2)}{2}$.

Q 29 *En déduire que la série* $\sum v_n$ *converge et préciser sa somme.*

On considère une suite (a_n) de réels positifs et φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = a_{\varphi(n)}$.

Q 30 *Montrer que si la série* $\sum a_n$ *converge alors la série* $\sum b_n$ *converge*

Q 31 *Montrer que la série* $\sum a_n$ *converge si et seulement si la série* $\sum b_n$ *converge et que si la série* $\sum a_n$ *converge alors* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Q 32 *Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai si on ne suppose plus que* $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0$*?*

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ vérifiant $f(0) = 0$.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Q 33 *Montrer que* g *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Q 34 *Montrer que* g *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$.

Q 35 *Justifier que* g *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^*$ *et que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \neq 0,\ g^{(n)}(x) = \frac{n!}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x)$$

Q 36 *Montrer que* g *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

Q 37 *Justifier que* $\forall n \in \mathbb{N},\ g^{(n)}(0) = \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$.

Correction du DS 1

Exercice 1

R 1 *Par théorème sur les orpérations sur les fonctions, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et* $f'(x) = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$.

R 2 $x\cos(x) - \sin(x) = x(1 + o_{x\to 0}(x)) - (x + o_{x\to 0}(x^2)) = o_{x\to 0}(x^2)$ *donc* $f'(x) = \dfrac{o_{x\to 0}(x^2)}{x^2} = o_{x\to 0}(1)$ *donc* $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} f'(x) = 0$.

De plus, On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ *donc f est continue en 0 donc, par le théorème limite de la dérivée, f est dérivable en 0 et* $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} f'(x) = 0$.

R 3 *f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et* $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} f'(x) = 0$ *donc f' est continue en 0 donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.*

R 4 *f est C^2 sur $\mathbb{R}^*$ (th op) et* $f''(x) = \dfrac{x^2(-x\sin(x)) - 2x(x\cos(x) - \sin(x))}{x^4} = \dfrac{-x^2\sin(x) - 2x\cos(x) + 2\sin(x)}{x^3}$

R 5 *D'où* $f''(x) = \dfrac{-x^2(x + o_{x\to 0}(x)) - 2x\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2)\right) + 2\left(x - \dfrac{x^3}{6} + o_{x\to 0}(x^3)\right)}{x^3}$

$f''(x) == \dfrac{x^3\left(-1 + 1 - \dfrac{1}{3}\right) + o_{x\to 0}(x^3)}{x^3} \sim_{x\to 0} \dfrac{-\dfrac{1}{3}x^3}{x^3}$ *donc* $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} f''(x) = -\dfrac{1}{3}$.

Comme f' est continue en 0, le théorème limite de la dérivée donne $f''(0) = -\dfrac{1}{3}$ *(et donc f'' est continue en 0) donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 2

R 6 *Soit* $\varphi(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$*: φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$,* $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0$.

La fonction φ est donc constante sur $]-\infty, 0[$ et constante sur $]0, +\infty[$.

Or $\varphi(1) = \dfrac{\pi}{2}$ *et* $\varphi(1) = -\dfrac{\pi}{2}$ *donc si $x > 0$ alors* $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}$ *et si $x < 0$ alors* $\varphi(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.

R 7 *On a* $\frac{1}{1+n^2} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}$ *et la SATP* $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge donc la série* $\sum \frac{1}{1+n^2}$ *est convergente.*

R 8 *Soit $k \geq 1$ et $t \in [k-1, k]$. On a* $1 + (k-1)^2 \leq 1 + t^2 \leq 1 + k^2$ *donc* $\dfrac{1}{1+k^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+(k-1)^2}$ *d'où*
$\dfrac{1}{1+k^2}(k - (k-1)) \leq \int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{1+t^2}dt \leq \dfrac{1}{1+(k-1)^2}(k - (k-1))$ *soit* $\dfrac{1}{1+k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{1+t^2}dt \leq \dfrac{1}{1+(k-1)^2}$.

En remplaçant k par $k+1$ dans la deuxième inégalité, on obtient

$\int_{k}^{k+1} \dfrac{1}{1+t^2}dt \leq \dfrac{1}{1+k^2}$ *donc* $\int_{k}^{k+1} \dfrac{1}{1+t^2}dt \leq \dfrac{1}{1+k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{1+t^2}dt$ *donc*

$\sum\limits_{k=n+1}^{p} \int_{k}^{k+1} \dfrac{1}{1+t^2}dt \leq \sum\limits_{k=n+1}^{p} \frac{1}{1+k^2} \leq \sum\limits_{k=n+1}^{p} \int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{1+t^2}dt$ *d'où* $\int_{n+1}^{p+1} \frac{1}{1+t^2}dt \leq \sum\limits_{k=n+1}^{p} \frac{1}{1+k^2} \leq \int_{n}^{p} \frac{1}{1+t^2}dt$.

R 9 *L'encadrement précédent équivaut à* $\arctan(p+1) - \arctan(n+1) \leq R_n \leq \arctan(p) - \arctan(n)$ *et* $R_n = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{1+k^2}$ *et* $\lim_{p\to+\infty} \arctan(p+1) = \lim_{p\to+\infty} \arctan(p) = \dfrac{\pi}{2}$ *donc, en passant à la limite,* $\dfrac{\pi}{2} - \arctan(n+1) \leq R_n \leq \dfrac{\pi}{2} - \arctan(n)$.

R 10 *La première question de l'exercice permet d'en déduire que* $\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq R_n \leq \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$.
Or $\arctan(x) \sim_{x\to0} x$ *donc* $\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$ *et* $\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$ *donc* $R_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 3

R 11 *Si* $\alpha < \dfrac{1}{2}$ *alors* $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ *donc* $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n^\alpha} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ *et* $\sin(x) \sim_{x\to0} x$
donc $u_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} > 0$. *La SATP* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *diverge donc* $\sum u_n$ *diverge.*

R 12 *Si* $\alpha > \dfrac{1}{2}$, *on a* $\sin(x) = x + O_{x\to0}(x^3)$ *et* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ *donc* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n^\alpha} + O_{x\to0}\left(\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^3\right)$ *car* $\dfrac{1}{n^\alpha} = o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *converge 'CSSA) et la série* $\sum O_{x\to0}\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ *(comparaison avec Riemann)*
La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *converge ssi* $\alpha > 1$ *donc la série* $\sum u_n$ *converge ssi* $\alpha > 1$.

Exercice 4

R 13 *Posons* $u_n = \dfrac{1}{n!}$ *et* $v_n = \dfrac{1}{2^n}$, *on a* $w_n = \sum_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}$.
La série $\sum u_n$ *converge absolument et a pour somme* e^1 *(série exponentielle)*
La série $\sum v_n$ *converge absolument et a pour somme* $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 2$ *(série géométrique)*
donc (th sur le produit de Cauchy) la série $\sum w_n$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = e^1 \times 2$.

Problème

R 14 *Posons* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$. *On a* $(-1)^n a_n = \dfrac{1}{n+x} > 0$ *donc la série est alternée.*
De plus $|a_n| = \dfrac{1}{n+x}$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 0$.
De plus $n \leq n+1$ *donc* $0 < n+x \leq n+1+x$ *donc* $|a_{n+1}| \leq |a_n|$. *La suite* $(|a_n|)$ *est décroissante donc d'après C.S.S.A, la série* $\sum a_n$ *converge.*

R 15 *Toujours d'après CSSA, la somme* $S(x)$ *est du signe de* u_0 *et vérifie* $|S(x)| \leq |a_0|$.
Or $a_0 = \frac{1}{x} > 0$ *donc* $0 \leq S(x) \leq \frac{1}{x}$.

R 16 *Si* $x > 0$, $S(x) + S(x+1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+x} = \dfrac{1}{x}$.

R 17 *On a* $S(y) - S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+y} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+y} - \dfrac{(-1)^n}{n+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n (n+x-n-y)}{(n+x)(n+y)}$
donc $S(y) - S(x) = (x-y) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+x)(n+y)}$.

R 18 *On montre de même que la série* $\sum \dfrac{(-1)^n}{(n+x)(n+y)}$ *est spéciale alternée donc* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+x)(n+y)}$ *est du signe de son premier terme* $\dfrac{1}{xy} > 0$.
Si $0 < x < y$, *alors* $x - y < 0$ *donc* $S(y) - S(x) < 0$ *d'après la question précédente donc la fonction* S *est décroissante.*

R 19 *D'après ce qui précède,* $|S(y) - S(x)| = \left|(x-y) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+x)(n+y)}\right|$.
Pour $x \geq a$ *et* $y \geq a$, *par le CSSA,* $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+x)(n+y)}\right| \leq \left|\dfrac{1}{(0+x)(0+y)}\right| \leq \dfrac{1}{a^2}$ *donc*
$|S(y) - S(x)| \leq \dfrac{1}{a^2} |(x-y)|$.

R 20 *La fonction* S *est lipschitzienne sur* $[a, +\infty[$ *donc continue sur* $[a, +\infty[$ *avec* $a > 0$ *quelconque donc* S *est continue sur* $]0, +\infty[$

R 21 *La fonction* S *est continue en* 1 *donc* $\lim\limits_{x\to 0} S(x+1) = S(1)$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} + \infty$ *donc* $S(x+1) = o_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. *Or* $S(x) = \dfrac{1}{x} - S(x+1)$ *donc* $S(x) = \dfrac{1}{x} + o_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right) \sim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$.

R 22 *On sait que pour* $x > 0$ *on a* $S(x) + S(x+1) = \dfrac{1}{x}$ *et la fonction* S *est décroissante donc* $S(x) > S(x+1)$ *donc* $S(x) + S(x+1) \leq 2S(x)$ *donc* $S(x) \geq \dfrac{1}{2x}$. *Pour* $x > 1$, $S(x-1) + S(x) = \dfrac{1}{x-1}$ *et* $S(x) \leq S(x-1)$ *donc* $S(x-1) + S(x) \geq 2S(x)$ *donc* $S(x) \leq \dfrac{1}{2(x-1)}$ *donc* $\dfrac{1}{2x} \leq S(x) \leq \dfrac{1}{2(x-1)}$ *d'où* $1 \leq 2xS(x) \leq \dfrac{2x}{2(x-1)}$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} 2xS(x) = 1$ *et donc* $S(x) \sim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x}$ *en* $+\infty$.

R 23 *On a* $g_n(t) = \dfrac{1}{1+t} - \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k t^k = g_n(t) = \dfrac{1}{1+t} - \sum\limits_{k=0}^{n} (-t)^k = \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$
donc $|g_n(t)| = \dfrac{t^{n+1}}{1+t} \leq t^{n+1}$ *car* $t \geq 0$.

R 24 *On a* $|u_n| = \left|\int_0^1 g_n(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |g_n(t)|\,dt \leq \int_0^1 t^{n+1}dt = \left[\dfrac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+2}$ *d'où* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

R 25 *Par ailleurs* $u_n = \int_0^1 \dfrac{1}{1+t}dt - \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 t^k dt = \ln(2) - \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k+1}$. *Or* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k+1} = S(1)$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ *donc* $S(1) = \ln(2)$.

R 26 *La série* $\sum \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ *est spéciale alternée (déjà vu) donc* $|\ln(2) - S_n(1)| \leq |a_{n+1}|$ *(notation de la première question pour* $x = 1$*) donc* $|\ln(2) - S_n(1)| = \dfrac{1}{n+2}$
Si $n \geq 98$ *alors* $|\ln(2) - S_n(1)| \leq 10^{-2}$.

R 27 *On a* $S(x) = \dfrac{1}{x} - S(x+1)$ *et* $\lim\limits_{x\to0} S(x+1) = S(1)$ *donc* $S(x+1) = S(1) + o_{x\to0}(1)$ *donc* $S(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(2) + o_{x\to0}(1)$.

R 28 *Posons* $u_n = v_{3n} + v_{3n+1} + v_{3n+2}$.
On a $u_n = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{4n+2} - \dfrac{1}{4n+4} = \dfrac{1}{4n+2} - \dfrac{1}{4n+4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}\right)$.
On a $T_{3n+2} = \sum\limits_{i=0}^{3n+2} v_{3n} = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\dfrac{1}{2i+1} - \dfrac{1}{2i+2}\right) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{2n+1}\dfrac{(-1)^i}{i+1} = \dfrac{1}{2}S_{2n+1}(1) \to_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}\ln(2)$.

R 29 *On a* $T_{3n} = T_{3n+2} - (v_{3n+1} + v_{3n+2})$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{3n} = \dfrac{1}{2}\ln(2)$ *et de même* $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{3n+1} = \dfrac{1}{2}\ln(2)$ *donc la suite* (T_n) *converge vers* $\dfrac{\ln(2)}{2}$ *(résultat analogue à celui pour la suite des termes d'indices pairs et impairs) donc la série* $\sum v_n$ *converge et a pour somme* $\dfrac{\ln(2)}{2}$

R 30 *Supposons que* $\sum a_n$ *converge et posons* $\sigma_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$ *et* $\sigma'_n = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{\varphi(i)}$ *Si* $N = \max\{\varphi(i), i \in [[0,n]]\}$.
On a $\sigma'_n \leq \sigma_N \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *car* $a_n \geq 0$.
La suite (σ'_n) *est donc majorée donc* $\sum b_n$ *converge (et en passant à la limite,* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$*).*

R 31 *On a* $a_n = b_{\varphi^{-1}(n)}$ *donc si* $\sum b_n$ *converge alors* $\sum a_n$ *converge et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$.
On en déduit que $\sum a_n$ *converge ssi* $\sum b_n$ *converge et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$.

R 32 *On a* $v_{3n} = u_{2n}$, $v_{3n+1} = u_{4n+1}$ *et* $v_{3n+2} = u_{4n+3}$.
Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(3n) = 2n$, $\varphi(3n+1) = 4n+1$ *et* $\varphi(3n+2) = 4n+3$. φ *est bijective car atteint tous les pairs et tous les impairs exactement une fois.*
On a $v_n = u_{\varphi(n)}$ *et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *donc le résultat précédent ne subsiste pas si la série n'est pas à terme positifs.*

Exercice 5

R 33 *On a* $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \to_{x \to 0, x \neq 0} f'(0) = g(0)$ *donc* g *est continue en* 0*. Or* g *est continue sur* $\mathbb{R}^*$ *(th opérations) donc* g *est continue sur* $\mathbb{R}$*.*

R 34 *La fonction* g *est* C^1 *sur* $\mathbb{R}^*$ *(th opérations). Si* $x \neq 0$*, alors* $g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$*.*
Or $f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{1}{2!}f''(0)x^2 + o_{x\to 0}(x^2)$ *et* $f'(x) = f'(0) + f''(0)x + o_{x\to 0}(x)$ *(Taylor-Young) donc* $xf'(x) - f(x) = \dfrac{1}{2}f''(0)x^2 + o_{x\to 0}(x^2)$ *et* $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}f''(0)x^2 + o_{x\to 0}(x^2)}{x^2} = \dfrac{1}{2}f''(0) + o_{x\to 0}(1)$ *donc* $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} g'(x) = \dfrac{1}{2}f''(0)$*.*
Or g *est continue en* 0 *donc d'après le théorème limite de la dérivée,* g *est dérivable en* 0 *et* $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} g'(x) = \dfrac{1}{2}f''(0)$*, ce qui entraîne la continuité de de* g' *en* 0 *donc* g *est* C^1 *sur* $\mathbb{R}$*.*

R 35 *On a, pour* $x \neq 0$*,* $g(x) = f(x) \times x^{-1}$*. Posons* $h(x) = x^{-1}$*.*
On montrer par récurrence sur k *que* $h^{(k)}(x) = (-1)^k \times k! \times x^{-k-1}$ *donc d'après la formule de Leibniz,*

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, h^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \times (-1)^{n-k} \times (n-k)! \times x^{-(n-k)-1} \\ &= \frac{1}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k f^{(k)}(x)(-1)^k \times (n-k)! = \frac{n!}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x) \end{aligned}$$

R 36 f *est de classe* C^∞ *d"onc d'après la formule de Taylor-Young appliquée à* $f^{(k)}$ *à l'ordre* $n-k+1$ *et* 0*,* $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-k+1} \dfrac{f^{(k+i)}(0)}{i!} x^i + o_{x\to 0}\left(x^{n-k+1}\right)$ *donc*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left[(-1)^{n-k} \frac{x^k}{k!} \sum_{i=0}^{n-k+1} \frac{f^{(k+i)}(0)}{i!} x^i + o_{x\to 0}\left(x^{n-k+1}\right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{i=0}^{n-k+1} (-1)^{n-k} \frac{x^{k+i}}{k!i!} f^{(k+i)}(0) \right] + o_{x\to 0}\left(x^{n+1}\right) \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{j=k}^{n+1} (-1)^k \frac{x^j}{k!(j-k)!} f^{(j)}(0) \right] + o_{x\to 0}\left(x^{n+1}\right) \\ &= (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \left[x^j f^{(j)}(0) \sum_{k=0}^{j} \frac{(-1)^k}{k!(j-k)!} \right] \\ &\quad + x^{n+1} f^{(n+1)}(0)(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!((n+1)-k)!} + o_{x\to 0}\left(x^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Or si $j \geq 1$*, alors* $\sum\limits_{k=0}^{j} \dfrac{(-1)^k}{k!(j-k)!} = j! \sum\limits_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} = j!(1 + (-1))^j = 0$ *donc* $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^k}{k!} f^{(k)}(x) = x^{n+1} f^{(n+1)}(0) \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!((n+1)-k)!} + o_{x\to 0}(x^{n+1})$ *car pour* $j = 0$*,* $f^{(j)}(0) = f(0) = 0$ *donc* $g^{(n)}(x) = (-1)^n n! \dfrac{x^{n+1} f^{(n+1)}(0) \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(j-k)!} + o_{x\to 0}(x^{n+1})}{x^{n+1}} = (-1)^n n! f^{(n+1)}(0) \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!(j-k)!} + o_{x\to 0}(1)$

donc $\lim_{x\to 0, x\neq 0} g^{(n)}(x) = (-1)^n n! f^{(n+1)}(0) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!\,((n+1)-k)!}$.

Montrons par récurrrence sur n *que* g *est de classe* C^n *sur* $\mathbb{R}$:

- C'est vrai pour $n = 0$ *(continuité de* g*).*

Soit $n \geq 1$. *Supposons* g *de classe* C^{n-1} *sur* $\mathbb{R}$. *Montrons que* g *est* C^n *sur* $\mathbb{R}$. *La fonction* g *est* C^n *sur* $\mathbb{R}^*$ *(th opérations) et*

- $g^{(n-1)}$ *est continue en* 0

- $g^{(n-1)}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$

- $\left(g^{(n-1)}\right)' = g^{(n)}$ *admet une limite réelle en* 0

donc (th limite de la dérivée, $g^{(n-1)}$ *est dérivable en* 0 *et* $g^{(n)}(0) = \lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} g^{(n)}(x)$, *ce qui entraîne que* $g^{(n)}$ *est continue en* 0 *donc que* g *est de classe* C^n.

R 37 *On a donc* $g^{(n)}(0) = (-1)^n n! f^{(n+1)}(0) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!\,((n+1)-k)!} = (-1)^n \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k - (-1)^{n+1} \right)$.

Or $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k = (1 + (-1))^{n+1} = 0$ *donc* $g^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$.