Psi Semaines 1 et 2

Contenu:

- Séries convergentes, séries à termes positif, séries absolument convergentes, critères de comparaison, série de Riemann, critère de D'Alembert, méthode et théorème de comparaison séries intégrales, produit de Cauchy. Séries spéciales alternées.
- Révisions: fonction arctangente, inégalité des accroissements finis, inégalité de Taylor Lagrange.
- Rappels d'algèbre linéaire: familles libres, familles génératrices, noyau, image théorème du rang, calcul matriciel,
- matrices semblables, trace, noyau d'une forme linéaire non nulle.
- Convergence des intégrales des fonctions **continues sur** $[a, +\infty[$, relation de Chasles, linéairité, cas des fonctions positives. absolue convergence, critères de comparaison, intégration par parties et de changement de variable de variable. Condition de nullité de l'intégrale d'un continue positive.

ATTENTION POUR LES COLLEURS: Pour l'instant les fonctions dont on considère l'intégrale généralisée sont continues sur un intervalle $[a, +\infty[$. On ne parle pas de fonction intégrable. Le théorème de changement de variable se fait avec une bijection C^1 strictement croissante entre des intervalles de la forme $[a, +\infty[$ (pour d'autres changements de variable, revenir à $\int_0^x$).

Questions de cours:

1. Thm de dérivation de la réciproque. Application à arctan.
2. Que pensez vous des relations $\arctan(\tan(x)) = x$ et $\tan(\arctan(x)) = x$?
3. Montrer que la fonction sinus est 1-lipschitzienne
4. Déterminer un réel K tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \left|\cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right| \leq K \times x^4$.
5. Définition des relations de comparaison (suites ou fonctions).
6. Rappeler les croissances comparées vues en première année.
7. Développemments llimités de première année.
8. Que dire des exponentiels d'équivalents (justifier)? Montrer que $\ln(x+1) \sim_{x\to+\infty} \ln(x)$.
9. Croissances comparées et interprétation à l'aide de la relation o.
10. Donner un équivalent en 0 des fonctions $\sin(x) + x\cos(x)$ et $\sin(x) - x\cos(x)$. Conclusion sur les équivalents de somme?
11. Déterminer la limite de la suite $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
12. Soit α un réel. L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
13. Etudier la nature de l' intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{1+x^2} dx$.
14. Justifier la convergence et calculer l' intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+4t+9} dt$.
15. Justifier la convergence et calculer l' intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t \times e^{-t} dt$.
16. Justifier la convergence et calculer l'intégrale généralisée: $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^{2t}} dt$
17. Montrer que l'intégrale converge $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}} dt$ et est égale à $\int_1^{+\infty} e^{-u^2} du$.
18. Justifier la convergence et calculer l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} dt$.
19. Montrer que l'intégrale généralisé $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ est convergente.
20. Convergence et somme de $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$.

21. Enoncer les différents critères de comparaison permettant de conclure à la convergence d'une série $(\leq, O, \sim)$ en précisant bien les hypothèse et la conclusion (SATP, convergence absolue). Prendre la contraposée d'un de ces énoncés.

22. Nature de $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)}dt$.et de $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$.

23. Enoncer et $(*)$ démontrer la règle de d'Alembert dans le cas $l < 1$.

24. Etudier la nature de $\sum \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$ (exo)..

25. Convergence de $\sum \frac{a^n}{1+b^n}$ $(a > 0, b > 0)$ (exo).

26. Soit $\alpha > 0$. Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

27. Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. Donner un encadrement de sa somme S et donner un entier n_0 à partir duquel $|S - S_n| \leq 10^{-2}$ (exo). (Attention à ne pas écrire d'équivalence fausse).

28. Convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}}$.

29. Donner deux séries équivalentes de nature différentes.

30. Donner la définition du produit de Cauchy de deux séries. Enoncer le théorème à son sujet.

31. On suppose $|x| < 1$. Montrer que la série $\sum (n+1)\,x^n$ converge et déterminer sa somme (poser $u_n = v_n = x^n$).

32. $(*)$ En utilisant le produiut de Cauchy, montrer que $\exp(z + z') = \exp(z) \times \exp(z')$.

33. Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre.

34. On pose $f_\alpha(x) = e^{\alpha x}$. Montrer que pour tout famille $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de scalaires deux à deux distincts, la famille de fonctions $(f_{\alpha_i})_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

35. Existence et unicité d'un polynôme L_i vérifiant $\deg(P) \leq n$ et $\forall j \in [[0, n]]$, $L_i(a_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq i \\ 1 \text{ si } j = i \end{cases}$ (les a_i étant supposés deux à deux distincts).
La famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Coordonnées d'un polynôme de degré $\leq n$ dans cette base.

36. Comparer pour l'inclusion $\mathrm{Im}(g \circ f)$ avec $\mathrm{Im}(?)$ et $\ker(g \circ f)$ avec $\ker(?)$.

37. Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(?) \subset \ker(?)$.

38. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et que E est de dimension finie.
Comment obtient-on une génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Comparer $\dim(\mathrm{Im}(f))$ avec $\dim(E)$.

39. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.
En déduire que si f est injective alors $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$.

40. Caractérisation des isomorphismes en dimension finie: dem à partir du th du rang.

41. $rg(g \circ f) \leq rg(f)$ et $rg(g \circ f) \leq rg(g)$.

42. $(*)$ Existence et unicité d'un polynôme P vérifiant $\deg(P) \leq n$ et $\forall i \in [[0, n]]$, $P(a_i) = b_i$ en introduisant un isomorphisme..

43. Déterminer les puissances successives de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}_n$ en considérant les images des vecteurs de la base canonique par l'endomorphisme canoniquement associé.

44. Dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de $\mathcal{L}(E,F)$.

45. Produit de matrices élémentaires.

46. Le produit de matrices triangulaires supérieures l'est aussi. Que peut-on dire des coefficients diagonaux du produit? (exo)

47. Déterminer la nature de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0 \end{array} \right.$: à l'aide du théorème du rang.

48. Résoudre le système$(\mathcal{S})$ de la question précédente.

49. Montrer que $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

50. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables. Idem avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

51. On suppose que $B = P^{-1}AP$. Exprimer B^n en fonction de A et P.

52. Relation $tr(AB) = tr(BA)$. Définition de la trace d'une endomorphisme.

53. trace d'un projecteur.

54. Existe-t-il un couple (A,B) de matrices carrées de taille n vérifiant $AB - BA = I_n$?

55. Le noyau d'une forme linéaire non nulle d'un espace vectoriel E de dimension finie est un hyperplan de E.
Soit $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, tr(M = 0)\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et préciser sa dimension.

En plus des question précédentes, une ou plusieurs questions prises dans la suite (en admettant éventuellement une partie des résultats):

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire canoniquement associée à A. Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ On pose $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $f(u_1) = u_1$.

2. Déterminer les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $AX = 3X$. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_2 = e_1 + \alpha e_2$ vérifie $f(u_2) = 3u_2$.

3. Déterminer une matrice $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. Calculer P^{-1}.

5. Calculer D^n, puis calculer A^n.

6. Dans la suite, on pose $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), MA = AM\}$. Montrer que $C(A)$ est un espace vectoriel.

7. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$. Montrer que $MA = AM \Leftrightarrow ND = DN$.

8. Déterminer les matrices $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $ND = DN$.

9. Déterminer une base et la dimension de $C(A)$.

10. Montrer que $C(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de I_2 et A.