PSI DS 1, (le mercredi 18 septembre 2024, durée 4h)

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Cours et applications directes:

Attention 1 ***les questions sont indépendantes***

Q 1 *Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument.*

Q 2 *Donner deux séries de terme général u_n et v_n vérifiant $u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$ qui ne sont pas de même nature (on justifiera la réponse).*

Q 3 *Etudier, suivant la valeur de $a > 0$, la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$.*

Q 4 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3n+2}$.*

1. *Montrer que la série $\sum u_n$ converge mais n'est pas absolument convergente.*
2. *Donner le signe de $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.*
3. *Déterminer un rang à partir duquel $\left| S - \sum\limits_{k=0}^{n} u_k \right| \leq 10^{-3}$.*

Q 5 *Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{(t+2)\sqrt{1+t}}$.*

1. *Justifier l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.*
2. *Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_1^{+\infty} \dfrac{2}{1+u^2} du$ et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.*

Q 6 *Pour $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \left(\sum\limits_{i=0}^{n} \dfrac{1}{i!}\right) x^n$.*

Montrer, en utilisant un produit de Cauchy, que la série $\sum w_n$ converge et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \dfrac{e^x}{1-x}$.

Q 7 *Déterminer un réel K tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left| \cos(x) - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right) \right| \leq K \times x^4$.*

Exercice 1:

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On pose $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

Q 8 *On suppose que $a=-2$ et $b=1$.*
Calculer $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

Q 9 *Dans cette question (a,b) est quelconque.*

1. *Déterminer des réels c, d et e tels que $u_n = c\ln(n) + \dfrac{d}{n} + \dfrac{e}{n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.*

2. *Etudier la convergence de la série $\sum u_n$.*

Exercice 2:

On pose, pour $t \geq 2$, $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$.

Q 10 *Existe-t-il un réel $\alpha > 1$ tel que $f(t) = o_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$?*

Q 11 *On pose, pour $x \geq 2$, $F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$.*
Calculer $F(x)$. En déduire la nature de l'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$.

Q 12 *Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n(\ln(n))^2}$.*

Q 13 *Pour $n \geq 3$, on pose $u_n = \dfrac{\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{(\ln(n^2+n))^2}$.*

1. *Montrer que $\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$.*

2. *En déduire la nature de la série $\sum u_n$.*

Exercice 3:

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et f un endomorphisme de E vérifiant $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

Q 14 *Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$.*
Montrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

Q 15 *Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit* $\begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q 16 *On suppose que $n=4$ et que g est une endomorphisme de E vérifiant $g^2 = 0$ et $rg(g) = 2$.*
Montrer que $\mathrm{Im}(g) = \ker(g)$.

En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de g soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4:

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit f l'application linéaire canoniquement associée à M et (e_1, e_2) la base canonique de $E = \mathbb{R}^2$.

Q 17 *Justifier que la famille $(e_1, f(e_1))$ est une base de E. Calculer $f \circ f(e_1)$.*

Q 18 *En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*
Préciser la valeur de la matrice P obtenue.

Q 19 *On pose $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*
Déterminer une matrice $X_1 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M_1 = X_1Y_1 - Y_1X_1$.

Q 20 *Déterminer des matrices X et Y de taille 2 vérifiant $M = XY - YX$ (on partira du résultat de la question précédente).*

Exercice 5:

On s'intéresse à la nature de l'intégrale généralisée $I = \int_1^{+\infty} \cos(t^2)\, dt$.

Q 21 *Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^{3/2}} du$ converge.*

Q 22 *En déduire que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du$ converge.*

Q 23 *En déduire que l'intégrale généralisée I est convergente.*

Q 24 *La fonction $f : t \mapsto \cos(t^2)$ admet-elle une limite en $+\infty$.*

Problème:

Le but du problème est de montrer un critère de convergence de la série $\sum u_n$ portant sur le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ plus précis que la règle de d'Alembert et de l'appliquer à certains exemples. On suppose que (u_n) et (v_n) sont deux suites de réels strictement positifs. On considère deux réels λ et α distincts.

Q 25 *On suppose qu'il existe un rang n_0, à partir duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.*

1. *Déterminer une constante $K > 0$ telle que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq Kv_n$.*
2. *Montrer que si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.*

Q 26 *On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ et $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$.*

1. *On suppose que $\lambda > 1$. En considérant $\alpha \in]1, \lambda[$, montrer que la série $\sum u_n$ converge.*
2. *On suppose que $\lambda < 1$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.*

Q 27 *On pose* $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$. *Simplifier* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. *Déduire des questions précédentes la nature de la série* $\sum a_n$.

Q 28 *On pose, pour* a *et* b *réels strictement positifs et* $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}$. *Donner, suivant la valeur de* (a,b), *la nature de la série* $\sum b_n$.

Q 29 *On souhaite vérifier à l'aide d'exemples qu'il n'est pas possible de donner à priori la nature de la série* $\sum u_n$ *lorsque* $\lambda = 1$, *c'est-à-dire lorsque* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

1. *On pose* $w_n = \dfrac{1}{n}$. *Justifier que* $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. *On pose* $z_n = \dfrac{1}{n \times \ln(n)^2}$. *Montrer que* $\dfrac{z_{n+1}}{z_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
3. *Conclure.*

Q 30 *On suppose maintenant qu'il existe une série* $\sum v_n$ *absolument convergente telle que pour tout* n, *on a l'égalité* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + v_n$.

1. *Montrer qu'on peut écrire* $\dfrac{(n+1)u_{n+1}}{nu_n} = 1 + w_n$ *où* w_n *est le terme général d'une série absolument convergente à préciser.*
2. *En déduire que la suite* $(\ln(nu_n))$ *est convergente, puis, montrer qu'il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{C}{n}$. *Conclure.*

Q 31 *Etudier la nature de la série de terme général* $y_n = \left(\dfrac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{1 \times 3 \cdots \times (2n+1)}\right)^2$.

CORRECTION:

Cours et applications directes:

R 1 *Voir cours (appliquer par exemple la règle de d'Alembert)*

R 2 *Voir cours* ($\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *et* $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}$)

R 3 *Si* $a<1$, *alors* $u_n \sim_{n\to\infty} a^n>0$ *et* $\sum a^n$ *converge donc* $\sum u_n$ *converge.*
Si $a>1$, *alors* $u_n \sim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{a^{2n}}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^n>0$ *et* $\sum\left(\dfrac{1}{a}\right)^n$ *converge car* $0<\dfrac{1}{a}<1$ *donc* $\sum u_n$ *converge.*
Si $a=1$, *alors* $u_n=\dfrac{1}{2}\not\to_{n\to+\infty}0$ *donc* $\sum u_n$ *diverge grossièrement.*

R 4 $u_n=\dfrac{(-1)^n}{3n+2}$.

1. *Hypothèses du CSSA:* $(H1):(-1)^n u_n=\dfrac{1}{3n+2}>0$ (H_2) $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ *et* $(H_3):|u_n|=\dfrac{1}{3n+2}$ *donc* $(|u_n|)$ *décroit donc* $\sum u_n\, CV$.
De plus $|u_n|\sim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{3n}$ *et* $\sum\dfrac{1}{n}$*SATP DV donc* $\sum|u_n|$ *DV.*
2. *D'après CSSA,* S *est du signe de* u_0 *donc positif*
3. *et* $|R_n|=\left|S-\sum\limits_{k=0}^{n}u_k\right|\le|u_{n+1}|=\dfrac{1}{3n+5}$. *Si* $n\ge\dfrac{1000-5}{3}$, *alors* $\dfrac{1}{3n+5}\le10^{-3}$ *donc* $\left|S-\sum\limits_{k=0}^{n}u_k\right|\le10^{-3}$.

R 5 $I=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{(t+2)\sqrt{1+t}}dt$.

1. *La fonction* f *est continue sur* $[1,+\infty[$ *et* $f(t)\sim_{t\to+\infty}\dfrac{1}{t^{3/2}}>0$.
Or $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^{3/2}}dt$ *converge donc* I *est convergente*
2. *Posons* $u(t)=\sqrt{1+t}$. *La fonction* u *est de classe* C^1 *et strictement croissante sur* $]1,+\infty[$.
On a $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)=+\infty$ *donc* u *réalise une bijection de* $]1,+\infty[$ *dans* $\left]\sqrt{2},+\infty\right[$ *donc (chg*^{t} *var)*
$I=\int_1^{+\infty}\dfrac{2}{(t+2)}\dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}dt=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\dfrac{2}{1+u^2}du=2\left[\arctan(u)\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty}=2\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan\left(\sqrt{2}\right)\right)$.

R 6 *On pose* $u_n=\dfrac{x^n}{n!}$, $v_n=x^n$. *Le produit de cauchy des séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *est la série de teme général* $\sum\limits_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}x^{n-k}=w_n$
Or d'après le cours, les séries $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent absolument et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n=\dfrac{1}{1-x}$ *et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}v_n=\exp(x)$ *donc la série* $\sum w_n$ *converge absolument et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}w_n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n\sum\limits_{n=0}^{+\infty}v_n=\dfrac{\exp(x)}{1-x}$.

R 7 *Appliquons Taylor-Lagrange à* $f:t\mapsto\cos(t)$ *avec* $n=3$, $a=0$ *et* $b=x$:
La fonction f *est* $C^{(4)}$ *et* $f^{(4)}(t)=\cos(t)$ *donc* $\forall t\in\mathbb{R}$, $\left|f^{(4)}(t)\right|\le1=M_4$
donc $\left|f(x)-\sum\limits_{k=0}^{3}\dfrac{f^{(i)}(0)}{k!}(x-0)^k\right|\le\dfrac{M_4|x-0|^4}{4!}$.
Or $\sum\limits_{k=0}^{3}\dfrac{f^{(i)}(0)}{k!}(x-0)^k$ *est la partie régulière du DL à l'ordre* 3 *de* $\cos$ *en* 0 *donc égal à* $1-\dfrac{x^2}{2}$
donc $\left|\cos(x)-\left(1-\dfrac{x^2}{2}\right)\right|\le\dfrac{1}{4!}\times x^4=\dfrac{1}{24}x^4$.

Exercice 1:

R 8 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\ln(k)-2\ln(k+1)+\ln(k+2)\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(k)-2\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(k+1)+\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(k+2)$

donc $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(k)-2\sum\limits_{k=2}^{n+1}\ln(k)+\sum\limits_{k=3}^{n+2}\ln(k)$ *d'où*

$S_n=\ln(1)+\ln(2)-2\ln(2)+\sum\limits_{k=3}^{n}\left((1-2+1)\ln(k)\right)-2\ln(n+2)+\ln(n+1)+\ln(n+2)$ *donc*

$S_n=\ln(2)+\ln\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)\to_{n\to+\infty}\ln(2)$ *la série converge et* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\ln(n)-2\ln(n+1)+\ln(n+2)\right)=\ln(2)$.

R 9 *Cas général*

1. $u_n=\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)=\ln(n)+a\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)+b\ln\left(n\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)$ *donc* $u_n=(1+a+b)\ln(n)+a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$. *Or* $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o_{x\to0}\left(x^2\right)$ *donc* $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *et* $\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)=\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *donc* $u_n=(1+a+b)\ln(n)+\dfrac{a+2b}{n}+\dfrac{-a-4b}{2n^2}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

2. *Si* $1+a+b\neq0$ *alors* $u_n\sim_{n\to+\infty}(1+a+b)\ln(n)$ *donc série* $\sum u_n$ *diverge grossièrement.* *Si* $1+a+b=0$ *et* $a+2b\neq0$ *alors* $u_n\sim_{n\to+\infty}\dfrac{a+2b}{n}$. *Or la série* $\sum\dfrac{1}{n}$ *est une SATP divergente donc la série* $\sum u_n$ *diverge. la série* $\sum u_n$. *Si* $1+a+b=0$ *et* $a+2b=0$, *soit* $a=-2$ *et* $b=1$, *alors* $u_n=O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. *Or la série* $\sum\dfrac{1}{n^2}$ *est une SATP convergente donc la série* $\sum u_n$ *converge absolument donc converge.*

Exercice 2:

R 10 *On a* $\dfrac{\dfrac{1}{t(\ln(t))^2}}{\dfrac{1}{t^\alpha}}=\dfrac{t^{\alpha-1}}{\ln^2(t)}\to_{t\to+\infty}+\infty$ *car* $\alpha-1>0$ *(CC).donc*

si $\alpha>1$, *on n'a pas* $\dfrac{1}{t(\ln(t))^2}=o_{t\to\infty}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$.

R 11 *On a* $F(x)=\int_2^x\dfrac{u'(t)}{u^2(t)}dt$ *avec* $u(t)=\ln(t)$ *donc* $F(x)=\left[\dfrac{-1}{u(t)}\right]_2^x=\dfrac{-1}{\ln(x)}+\dfrac{1}{\ln(2)}\to_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln(2)}$.
On en déduit que l'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty}f(t)\,dt$ *converge et vaut* $\dfrac{1}{\ln(2)}$.

R 12 *On a, pour* $k\geq2$, *pour* $t\in[k,k+1]$, $\dfrac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2}\leq\dfrac{1}{t(\ln(t))^2}\leq\dfrac{1}{k(\ln(k))^2}$

donc $\dfrac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2}\leq\int_k^{k+1}\dfrac{1}{t(\ln(t))^2}dt\leq\dfrac{1}{k(\ln(k))^2}$ *donc pour* $k\geq3$, $\dfrac{1}{k(\ln(k))^2}\leq\int_{k-1}^{k}\dfrac{1}{t(\ln(t))^2}dt$.
On en déduit que $\sum\limits_{k=3}^{n}\dfrac{1}{k(\ln(k))^2}\leq\int_2^n\dfrac{1}{t(\ln(t))^2}dt\leq\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{t(\ln(t))^2}dt$ *(intégrale généralisée convergente d'une fonction positive).*
La suite des sommes partielles de la SATP $\sum_{n\geq2}\dfrac{1}{n(\ln(n))^2}$ *est majorée par* $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{t(\ln(t))^2}dt$ $\sum_{n\geq2}\dfrac{1}{n(\ln(n))^2}$ *donc la série* $\sum_{n\geq2}\dfrac{1}{n(\ln(n))^2}$ *converge.*

R 13 *On pose, pour tout entier naturel* $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

1. *Quand* $n \to +\infty$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}\times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$
   donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\times\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. *On en déduit que* $\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$.

2. *De plus, au voisinage de* $+\infty$, $\ln\left(n^2+n\right) = \ln\left(n^2\left(1+1/n\right)\right) = 2\ln n + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 2\ln n + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   Donc $\ln\left(n^2+n\right) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln n$.
   On en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{4} \times \dfrac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$.
   Or, d'apès Q3, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$ *converge.*
   Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ *converge.*

Exercice 3:

R 14 *On a* $f^{n-1} \neq 0$ *donc existe* $x \in E$ *tel que* $f^{n-1}(x) \neq 0$.
Soit $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ *des scalaires. Supposons que* $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0_E$.
En appliquant f^{n-1}, *on obtient, par linéarité* $\lambda_0 f^{n-1}(x) + \lambda_1 f^n(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{2n-2}(x) = 0_E$ *donc* $\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0_E$ *donc* $\lambda_0 = 0$. *On en déduit que* $\lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0_E$. *En appliquant* f^{n-2} *on obtient de même que* $\lambda_1 = 0$ *et ainsi de suite jusqu'à* $\lambda_{n-1} = 0$ *donc la famlille* $\left(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right)$ *est libre et admet* $n = \dim(E)$ *éléments donc est une base de* E.

R 15 *Dans la base* $\left(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right)$ *de* E *la matrice de* f *est* $\begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

R 16 *On a* $g \circ g = 0$ *donc* $\mathrm{Im}(g) \subset \ker(g)$.
Or $\dim(\ker(g)) + \dim(\ker(g)) = 4$ *et* $rg(g) = 2$ *donc* $\dim(\ker(g)) = \dim(\mathrm{Im}(g)) = 2$ *donc* $\mathrm{Im}(g) = \ker(g)$.
Soit (e_1, e_2) *une base de* $\ker(g) = \mathrm{Im}(g)$. $e_1 \in \mathrm{Im}(g)$ *donc il existe* e_3 *tel que* $g(e_3) = e_1$.
De même il existe e_4 *tel que* $g(e_4) = e_2$.
Montrons que (e_1, e_2, e_3, e_4) *est libre. Si* $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = 0_E$, *en appliquant* f, $\lambda_3 e_1 + \lambda_4 e_2 = 0_E$ *donc* $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ *car* (e_1, e_2) *est libre et donc* $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_E$ *d'où* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. *la famlille* (e_1, e_2, e_3, e_4) *est libre et admet* $4 = \dim(E)$ *éléments donc est une base de* E.
La matrice de g *dans la base* (e_1, e_2, e_3, e_4) *est* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4:

R 17 *On a* $f(e_1) = e_1 + 3e_2$.*n'est pas colinéaire à* e_1 *donc la famille* $b' = (e_1, f(e_1))$ *est libre donc base de* $\mathbb{R}^2$.
On a $f \circ f(e_1) = f(e_1 + 3e_2) = f(e_1) + 3f(e_2) = 7e_1$.

R 18 *On a donc* $\mathrm{mat}_{b'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et donc donc* $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *avec* $P = P_{(e_1,e_2)}^{b'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

R 19 *Si* $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *alors* $XY_1 - Y_1X_1 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -b & 0 \end{pmatrix}$. *donc si* $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *alors* $M_1 = X_1Y_1 - Y_1X_1$.

R 20 *On a* $M_1 = X_1Y_1 - Y_1X_1$ *et* $M = PM_1P^{-1}$ *donc* $M = PX_1Y_1P^{-1} - PY_1X_1P^{-1}$
soit $M = (PX_1P^{-1})(PY_1P^{-1}) - (PY_1P^{-1})(PX_1P^{-1})$. *On peut donc choisir* $X = (PX_1P^{-1})$ *et* $Y = (PY_1P^{-1})$.
Pour finir les calculs, on doit calculer P^{-1}. *On résoud le système* $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

On a $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y=a \\ 3y=b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = a - \dfrac{b}{3} \\ y = \dfrac{b}{3} \end{array} \right.$ *donc* $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *donc*
$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{8}{3} \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ *et*
$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5:

R 21 *La fonction* $f : u \mapsto \dfrac{\sin(u)}{u^{3/2}}$ *est continue sur* $[1, +\infty[$.
De plus, $0 \leq |f(u)| \leq \dfrac{1}{u^{3/2}}$ *et* $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{u^{3/2}}du$ *converge donc.* $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(u)}{u^{3/2}}du$ *converge.*

R 22 *Sous réserve de convergence, l'IPP avec* $v'(u) = \cos(u)$ *et* $w(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ *donne*
$\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(u)}{\sqrt{u}}du = \left[-\dfrac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(u)}{2u^{3/2}}du.$
Or $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\sin(u)}{\sqrt{u}} = 0$ *car* $\sin$ *est bornée et* $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(u)}{2u^{3/2}}du$ *converge donc* $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(u)}{\sqrt{u}}du$ *converge.*

R 23 *La fonction* $u : t \mapsto t^2$ *est une bijection de classe* C^1 *strictement croissante de* $]1, +\infty[$ *sur* $]1, +\infty[$.
Sous réserve de convergence, le changement de variable donne
$I = \int_1^{+\infty} \cos(t^2)\, dt = \int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(t^2)}{2t} 2tdt = \int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}du$ *qui converge donc* I *converge.*

R 24 *Posons* $u_n = \sqrt{2n\pi}$ *et* $v_n = \sqrt{2n\pi + \pi}$. *On a* $f(u_n) = 1$ *et* $f(v_n) = -1$.
Si f *admettait une limit* l *en* $+\infty$, *alors, par composition des limites, on aurait* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n) = l$,
ce qui contredit ce qui précède donc la fonction f *n'admet pas en* $+\infty$.

Problème:

R 25 *On suppose qu'il existe un rang* n_0, *à partir duquel* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

1. *Montrons par récurrence que, pour* $n \geq n_0$, $u_n \leq \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n$.

   Pour $n = n_0$, $u_{n_0} = \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_{n_0}$.

   Soit $n \geq n_0$. *Supposons* $u_n \leq \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n$, *montrons* $u_{n+1} \leq \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_{n+1}$.

   On a $u_{n+1} = u_n \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *donc* $u_{n+1} \leq u_n \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq \dfrac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_{n+1}$, *ce qui achève la récurrence.*

2. *pour* $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq K v_n$ *donc si la série* $\sum v_n$ *converge alors la série* $\sum u_n$ *converge.*

R 26 *On suppose* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *et* $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

On a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\alpha = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-\alpha} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\alpha-\lambda}{n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \dfrac{\alpha-\lambda}{n}$.

1. *On a* $\lambda > 1$. *et en considérant* $\alpha \in]1, \lambda[$, $\alpha - \lambda < 0$ *donc il existe un rang* n_0*, à partir duquel* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 0$ *donc* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. *Or* $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ *avec* $\alpha > 1$ *donc d'après la question 25 2, la série* $\sum v_n$ *converge donc la série* $\sum u_n$ *converge.*

2. *On a* $\lambda < 1$. *On peut donc considérer* $\alpha \in]\lambda, 1[$, $\alpha - \lambda > 0$ *donc il existe un rang* n_0*, à partir duquel* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} > 0$ *donc* $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. *Or* $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ *avec* $\alpha < 1$ *donc la série* $\sum v_n$ *diverge donc d'après la contrapposée question 25 2, la série* $\sum u_n$ *diverge.*

R 27 *Avec* $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$, *donc* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)^2}$ *donc*

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+\frac{1}{2}}{n+1} = \dfrac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{n}} = \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = 1 - \dfrac{1}{2n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. *On peut donc appliquer la question 26 (car* $\dfrac{1}{2} < 1$*) donc la série* $\sum a_n$ *est divergente.*

R 28 *On a* $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{a+n}{b+n} = \dfrac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{b}{n}} = \left(1+\dfrac{a}{n}\right)\left(1-\dfrac{b}{n}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = 1 - \dfrac{b-a}{n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. *D'après la question 26*

- *Si* $b - a < 1$ *alors la série* $\sum b_n$ *diverge.*
- *Si* $b - a > 1$ *alors la série* $\sum b_n$ *converge.*
- *Si* $b - a = 1$ *alors* $b_n = \dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)} = \dfrac{a}{a+n} \sim_{+\infty} \dfrac{a}{n}$ *donc la série* $\sum b_n$ *diverge.*

R 29 *Cas* $\lambda = 1$:

1. *Si* $v_n = \dfrac{1}{n}$, *on a* $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 - \dfrac{1}{n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. *On a* $\dfrac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \dfrac{\ln(n)}{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)} = \dfrac{\ln(n)}{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}}$.

   Or $\ln(1+x) = x + o\sim_{x\to 0}(x)$

$\dfrac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n\ln(n)}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n\ln(n)}\right)} = 1-\dfrac{1}{n\ln(n)}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n\ln(n)}\right) = 1+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. *On en déduit que* $\dfrac{z_{n+1}}{z_n} = \dfrac{n\times\ln(n)^2}{(n+1)\times\ln(n+1)^2} = \dfrac{n}{(n+1)}\left(\dfrac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)^2 = \left(1-\dfrac{1}{n}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\left(1+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^2$.
D'où $\dfrac{z_{n+1}}{z_n} = 1-\dfrac{1}{n}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

3. *la série* $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ *est divergente et la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *est convergente (voir exercice 2) donc on ne peut a priori pas conclure si* $\lambda = 1$.

R 30 *On suppose maintenant qu'il existe une série* $\sum v_n$ *absolument convergente telle que pour tout* n, *on a l'égalité* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\dfrac{1}{n}+v_n$.

1. $\dfrac{(n+1)\,u_{n+1}}{nu_n} = \dfrac{(n+1)}{n}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}+v_n\right) = 1+v_n+\dfrac{v_n}{n}-\dfrac{1}{n^2} = 1+w_n$ *avec* $w_n = v_n-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{v_n}{n}$.
Or $\left|\dfrac{v_n}{n}\right| \leq |v_n|$ *donc la série* $\sum \dfrac{v_n}{n}$ *est une série absolument convergente et donc* $\sum w_n$ *est une série absolument convergente.*

2. $\ln(nu_n)-\ln(1u_1) = \sum_{k=1}^{n-1}\ln((k+1)\,u_k)-\ln(ku_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\dfrac{(k+1)\,u_{k+1}}{ku_k}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\ln(1+w_k)$.
Or $\sum w_n$ *converge donc* $\lim_{k\to+\infty} w_k = 0$ *donc* $\ln(1+w_k)\sim_{+\infty} w_k$ *qui est le terme général d'une série absolument convergente donc la série* $\sum \ln(1+w_k)$ *converge et donc la suite* $(\ln(nu_n)-\ln(u_1))$ *est convergente donc* $(\ln(nu_n))$ *converge vers un réel* l.
On en déduit que (nu_n) *vers* $e^l = C > 0$ *et donc* $\lim_{+\infty}\left(\dfrac{nu_n}{C}\right) = 1$ *donc* $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{C}{n}$ *qui est le terme général d'une série positive divergente donc la série* $\sum u_n$ *est divergente.*

R 31 $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \left(\dfrac{2n+2}{2n+3}\right)^2 = \left(\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{3}{2n}}\right)^2 = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{3}{2n}\right)^{-2}$ *doù*
$\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1-\dfrac{3}{n}+O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = 1-\dfrac{1}{n}+O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. *On peut donc, d'après ce qui précède, conclure que* $\sum y_n$ *est une série divergente.*

Commentaires:

Utilisation des notations

- ne pas écrire: $|u_n|$ est décroissante mais $(|u_n|)$ est décroissante

Règle de d'Alembert:

- ne pas oublier la limite
- ne pas appliquer de "réciproque" (cas $l = 1!$)

Utilisation d'équivalents et de DL

- ne pas écrire $u_n \sim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n}$: le facteur $\frac{1}{n}$ ne sert à rien
- Ordre final: le moins précis de tous les o sortant du calcul
- logarithme d'équivalent: à redémontrer
- $a_n \sim_{n\to+\infty} b_n \not\Rightarrow b_n - a_n \to_{n\to+\infty} 0$ et ce n'est pas vrai non plus dans l'autre sens
- Pas d'équivalent "à un facteur près": $\dfrac{3}{n} \not\sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}$
- Ne pas chercher à faire découler une inégalité d'un DL (pour tout x, n..). Ce n'est pas possible car on ne maîtrise pas le reste ailleurs qu'à la limite!
- $u_n \leq v_n \sim_{n\to+\infty} w_n \not\Rightarrow u_n \leq w_n$
- $\dfrac{2n+1}{2n+2} = 1 - \dfrac{1}{2n+2}$ et $\dfrac{1}{2n+2} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n}$ donc $\dfrac{1}{2n+2} = \dfrac{1}{2n} + o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$
  donc $\dfrac{2n+1}{2n+2} = 1 - \dfrac{1}{2n} + o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Utilsation des critères de comparaison pour la convergence de série et d'intégrales

- Ne pas oublier ≥ 0 si nécessaire
- passer par la valeur absolue
- ne pas redémontrer les critères de comparaison
- ne pas passer 10 lignes pour justifier la convergence d'une série géométrique ($\sum \dfrac{1}{a^n}$).
- ne pas écrire $\sum u_n \leq \sum v_n$ à la place de $u_n \leq v_n$
- $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ diverge: on ne peut rien dire
- $u_n \geq v_n \geq 0$ et $\sum v_n$ converge: on ne peut rien dire
- Q9 DV + DV: on ne peut pas conclure. Analyser les termes du plus grands au plus petit!

Comparaison série intégrale

Pas de théorème des gendarmes lorsque les limites des deux cotés ne sont pas les mêmes (par exemple dans une comparaison série intégrale)

- Pas de théorème général au programme: indiquez HORS PROGRAMME sur le cours photocopié

- Pas de théorème des gendarmes lorsque les limites des deux cotés ne sont pas les mêmes (par exemple dans une comparaison série intégrale)
- Comparaison série intégrale, pour la nature de la SAT: majorer pour montrer la CV et minorer pour montrer la DV

inégalités

- mentionner la positivité du facteur lorsque vous multipliez une inégalité

Algèbre

- ne pas parler de la dimension d'une famille mais de son nombre d'éléments
- attention à la définition de P dans la formule de changement de base
- penser à changer de base "pour tout" (cf fin E4)