Semaines 3 et 4

I Contenu

- Révisions sur les déterminants.
- Somme directe, sous-espaces stables, matrices définies par blocs, produit par bloc (4 blocs). déterminant de vandermonde $(V(a_0, \ldots, a_n))$ et déterminant triangulaire par blocs.
- séries entières. **Pour les colleurs: la continuité, l'intégration et la dérivation terme à terme sur $]-R, R[$ sont admis provisoirement**
- Equations différentielles linéaire: révisions sur le premier ordre et le second ordre à coeff constant.
  Equations différentielles linéaire du second ordre: Th de Cauchy(admis). Structure de l'ensemble des solutions d'une équation homogène.

II Questions de cours

1. Enoncer la formule de développement d'un déterminant par rapport à une colonne.
2. Montrer que le déterminant d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est entier. (on détaillera la récurrence).
3. Calculer $\det(M)$ si $\forall i$, $m_{i,i} = 0$ et $m_{i,j} = 1$ sinon.
4. **Enoncés** sur les sommes directes: définition, caractérisation en dimension finie par les bases et par la dimension (énoncés seuls).
5. Montrer que $f(E_1 + \cdots + E_p) = f(E_1) + \cdots + f(E_p)$. On suppose que la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe. Montrer que si f est injective, alors la somme $f(E_1) + \cdots + f(E_p)$ est-elle directe? (exo)
6. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a & d \\ 1 & 0 & 0 & b & e \\ 0 & 1 & 0 & c & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$. Montrer que A^6 est triangulaire supérieure.
7. **Enoncé seul:** expression de $\det(V(a_0, \ldots, a_n))$.
8. Calculer le produit de matrices définies par blocs suivant: $\begin{pmatrix} I_p & 0_{p,q} \\ 0_{q,p} & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & C \\ 0_{q,p} & I_q \end{pmatrix}$. Montrer que $\det\left(\begin{pmatrix} A & C \\ 0_{q,p} & I_q \end{pmatrix}\right) = \det(A)$. En déduire la formule du déterminant triangulaire par blocs.
9. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière.
10. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières?
11. Citer le théorème d'intégration terme et en déduire le développement en série entière de $\ln(1-x)$ et de $\ln(1+x)$.
12. Développer en série entière $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ et $\dfrac{1}{(1-x)^3}$ sur $]-1, 1[$. En déduire, pour $x \in]-1, 1[$ les sommes $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n x^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.
13. Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.
14. Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto \arctan(x)$.
15. Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée sur $]-1, 1[$ par $x \mapsto (1+x)^a$.
    Déterminer le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^a$ pour $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$.
16. Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$ et de somme $f(x)$. Montrer que f est paire si et seulement si $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$.
17. Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum a_n z^n$ avec $a_{2n} = 2^n$ et $a_{2n+1} = 3^n$ (exo).
18. En utilisant une série entière, montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
19. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{n}$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ (pour $x \in]-1, 1[$).

20. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^{\frac{n}{2}}}{(2n)!}$.

21. Développer en série entière la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ (utiliser les factorielles et puissances pour exprimer le résultat).

22. Résoudre l'équation $xy' + 3y = x^7$ sur $\mathbb{R}$ (recollement de solutions).

23. Montrer que l'unique solution sur $I = \mathbb{R}$ de l'équation $y'' + 2y = \frac{\sin(x)}{x^2+1}$ vérifiant les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ est impaire.

24. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = \sin(x)$.

25. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 2\cosh(x)$.

26. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $t^2y'' + ty' - y = 1$ (on cherchera des solutions de l'équation homogène de la forme $t \mapsto t^\alpha$).

27. Soit a, b, c des fonctions continues sur I et $(E) : y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$.
Soit y_0 une solution sur I de $(E_0) : y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ qui ne s'annule pas
On pose $y(x) = z(x)y_0(x)$. Montrer que y vérifie (E) si et seulement si z vérifie une équation que l'on précisera. Quel intéret?
Application: Deviner une solution non nulle de $(\mathcal{H}) : (t+1)x''(t) - x'(t) - tx(t) = 0$ sur $]-1, +\infty[$. Donner l'équation vérifiée par z. Expliquer la suite de la résolution.

28. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation $(\mathcal{E}) : x^2y''(x) + y(x) = 0$ en posant $x = e^t$ (bien expliquer ce que signifie "poser $x = e^t$ ").

29. Donner une base de l'ensemble des solutions de $y'' + 2xy' + 2y = 0$ formée de deux fonctions développables en série entière, l'une des fonctions étant paire et l'autre impaire. Préciser la fonction paire.