DM3 (pour le 27 septembre 2024)

Commentaires:

Problème:

Problème de nature des objets:
Ne pas confondre $\sigma : [|1,n|] \rightarrow [|1,n|]$ avec f_σ (c'est σ qui est supposé bijective et non f_σ).
Ne pas confondre $id_{[|1,n|]}$ avec l'endomorphisme id_E.
Problème dans l'utilisation de la bijectivité de σ (I 3a et c et II1)
cardinal de $\mathcal{P}_n$
II4a faire une analyse précise de la formule du produit (II3d: on peut passer par l'image de e_j)
Pour passer de $b_{i,\sigma(j)} = b_{\sigma^{-1}(i),j}$ à $b_{\sigma(l),\sigma(j)} = b_{i,j}$.il faut indiquer $\forall (i,j) \in [|1,n|]^2$ et σ^{-1} est une bijection

Exercice:

Q1a: arrivée trop rapide sur les factorielles en cas de récurrence immédiate
Q1b oubli des coefficients binômiaux dans le binôme
Q2: Attention à ne pas confondre $\Delta(u)$ et $\Delta(u)_p$
Q2a: dem on peut utiliser le binôme dans $\mathcal{L}(E)$.

Q2b: Récurrence pour $\Delta^n(u)$ avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$.Ecrire $\Delta^{n+1}(u) = \Delta(\Delta^n(u))$.

Problème:

Dans ce qui suit n est un élément de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2.

On note S_n l'ensemble des bijections de $[|1,n|]$ dans $[|1,n|]$.

Les éléments de S_n sont appelés permutations de $[|1,n|]$.

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n et $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base de E.

A toute permutation σ de $[|1,n|]$ on associe la matrice P_σ de$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par:

$$\forall (i,j)\in [|1,n|]^2, p_{i,j}=\begin{cases} 1 \text{ si } i=\sigma(j) \\ 0 \text{ si } i\neq \sigma(j)\end{cases}$$

A toute permutation σ de $[|1,n|]$ on associe l'endomorphisme f_σ de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est P_σ.

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation si on peut trouver une permutation σ de $[|1,n|]$ vérifiant $A=P_\sigma$.

Généralités

1. Ici $n=3$ et on pose $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que A est une matrice de permutation et déterminer la permutation correspondante.
   (b) Préciser les images de e_1, e_2 et e_3 par f_σ, f_σ^2 et f_σ^3
   (c) En déduire la matrice A^p pour $p\in\mathbb{N}$ quelconque.
2. Ici $n=4$.On considère l'élément σ de S_4 défini par $\sigma(1)=2$, $\sigma(2)=3$, $\sigma(3)=4$, $\sigma(4)=1$.
   (a) Ecrire la matrice P_σ.
   (b) Déterminer, pour $i\in[|1,n|]$, le vecteur $f_\sigma^4(e_i)$. En déduire que $P_\sigma^4=I_4$.
   (c) Déterminer $f_\sigma(e_1+e_2+e_3+e_4)$, $f_\sigma(e_1-e_2+e_3-e_4)$, $f_\sigma(e_1-e_3)$ et $f_\sigma(e_2-e_4)$.
   En déduire que P_σ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.
3. Trace d'une matrice de permutation
   (a) Montrer que si $P_\sigma\neq I_n$, alors $tr(P_\sigma)\in[|0,n-2|]$.
   (b) Réciproquement, Soit $i\in[|0,n-2|]$.
   Montrer qu'il existe une permutation σ vérifiant $tr(P_\sigma)=i$.
   (c) Montrer que deux matrices de permutation de trace $n-2$ sont semblables.

Produit avec une matrice de permutation

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des matrices de permutation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère deux permutations σ et σ' de $[|1,n|]$.

1. Démontrer qu'une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation si et seulement si la matrice A admet exactement un coefficient égal à 1 par ligne et par colonne et que ses autres coefficients sont nuls.
2. Justifier que l'ensemble $\mathcal{P}_n$ est fini et déterminer son cardinal.
3. Produit et inverse

(a) Soit $j \in [|1,n|]$. Préciser $f_\sigma(e_j)$.

(b) En déduire que $P_{\sigma'} \times P_\sigma = P_{\sigma' \circ \sigma}$.

(c) Déduire de la question précédente que P_σ est inversible et déterminer $(P_\sigma)^{-1}$.

(d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice AP_σ (on précisera les colonnes de cette matrice).

4. On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de permutation.

   (a) Soit $B = (b_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que $BP_\sigma = P_\sigma B$ si et seulement si $\forall (i,j) \in [|1,n|]^2, b_{\sigma(i),\sigma(j)} = b_{i,,j}$.

   (b) Montrer que pour tous couples $(i,j) \in [|1,n|]^2$ et $(k,l) \in [|1,n|]^2$ tels que $i \neq j$ et $k \neq l$, il existe une permutation σ vérifiant $\sigma(i) = k$ et $\sigma(j) = l$.

   (c) En déduire que $\mathcal{L}$ est l'ensemble des matrices $M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice: deux preuves d'une égalité combinatoire

1. **Avec la fonction Beta**
   On pose, pour tout couple (n,p) d'entiers naturels, $B(n,p) = \displaystyle\int_0^1 t^n (1-t)^p \,\mathrm{d}t$.

   (a) Pour tout couple $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, donner une relation entre les réels $B(n,p)$ et $B(n+1,p-1)$.
   En déduire, pour tout couple $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, l'égalité : $B(n,p) = \dfrac{n!\,p!}{(n+p+1)!}$.

   (b) Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Établir l'égalité

   $$(\mathcal{E}) \quad \frac{(m-1)!\,n!}{(m+n)!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{m+k}.$$

2. **Avec des différences finies**
   On note Δ l'application qui, à chaque suite réelle $u = (u_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$, associe la suite

   $$\Delta(u) = (u_{p+1} - u_p)_{p \in \mathbb{N}^*}.$$

   On note $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$, $\Delta^3 = \Delta \circ \Delta \circ \Delta$, etc., et $\Delta^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}}$.

   (a) Prouver, pour toute suite $u = (u_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$, pour tout entier naturel n et tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, l'égalité

   $$(\Delta^n(u))_p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} u_{p+k}.$$

   (b) En utilisant la suite $u = \left(\dfrac{1}{p}\right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ établir à nouveau l'égalité $(\mathcal{E})$.

Problème:

Généralités

1. (a) Les relations $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$ et $\sigma(3) = 2$ définissent une bijection de $[[1,3]]$ dans $[[1,3]]$ et $A = P_\sigma$.

   (b) Par $f_\sigma \begin{cases} e_1 \mapsto e_3 \mapsto e_2 \mapsto e_1 \\ e_2 \mapsto e_1 \mapsto e_3 \mapsto e_2 \\ e_3 \mapsto e_2 \mapsto e_1 \mapsto e_3 \end{cases}$ et $A^i = mat_{(e_1,e_2,e_3)}(f_\sigma^2)$ donc $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = I_3$.

   (c) Soit r (et q) le reste (et le quotient) dans la division de p par 3. On a $A^p = A^{3q+r} = (A^3)^q A^r = A^r$. On en déduit que $A^{3q} = I_3$, $A^{3q+1} = A$ et $A^{3q+2} = A^2$.

2. Ici $n = 4$.On considère l'élément σ de S_4 défini par $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 4$, $\sigma(4) = 1$.

   (a) Par définition $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) On a $e_1 \mapsto e_2 \mapsto e_3 \mapsto e_4 \mapsto e_1$ et de même pour les autres vecteurs donc $P_\sigma^4 = I_4$.

   (c) On a $\begin{cases} f_\sigma(e_1+e_2+e_3+e_4) = f_\sigma(e_1)+f_\sigma(e_2)+f_\sigma(e_3)+f_\sigma(e_4) = e_1+e_2+e_3+e_4 \\ f_\sigma(e_1-e_2+e_3-e_4) = -e_1+e_2-e_3+e_4 \\ f_\sigma(e_1-e_3) = e_2-e_4 \\ f_\sigma(e_2-e_4) = -e_1+e_3 \end{cases}$

   Posons $u_1 = e_1+e_2+e_3+e_4$, $u_2 = e_1-e_2+e_3-e_4$, $u_3 = e_2-e_4$ et $u_4 = e_2-e_4$. La famille (u_1,u_2,u_3,u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$ car a 4 éléments et est génératrice de $\mathbb{R}^4$ et :

   On a $u_1+u_2 = 2(e_1+e_3)$ et.$u_1-u_2 = 2(e_2+e_4)$ donc $\begin{cases} e_1 = \frac{1}{4}(u_1+u_2+2u_3) \\ e_3 = \frac{1}{4}(u_1+u_2-2u_3) \\ e_2 = \frac{1}{4}(u_1-u_2+2u_4) \\ e_2 = \frac{1}{4}(u_1-u_2-2u_4) \end{cases}$.

   Soit $P' = mat_{(u_1,u_2,u_3,u_4)}(f_\sigma)$. On a $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.et P_σ est semblable à la matrice P'.

3. Trace d'une matrice de permutation

   (a) Les coefficients d'une matrice de permutation sont des 0 et des 1 donc $tr(P_\sigma) \in [|0,n|]$.
   Si $P_\sigma \neq I_n$, alors $\exists i \in [|0,n|]$ tel que $\sigma(i) \neq i$. Posons $j = \sigma(i)$.
   On a.$\sigma(i) \neq \sigma(j)$ car σ est injective donc $\sigma(j) \neq j$. Il y a donc au moins deux coefficients diagonaux nuls donc $tr(P_\sigma) \in [|0,n-2|]$.

   (b) Soit σ la permutation définie par $\begin{matrix} i & 1 & 2 & \cdots & n-i+1 & n-i & n-i+1 & \cdots & n \\ \sigma(i) & 2 & 3 & \cdots & n-i & 1 & n-i+1 & \cdots & n \end{matrix}$ (il s'agit bien d'une bijection).
   On a $tr(P_\sigma) = i$ (écrire la matrice pour se rendre compte).

   (c) Une matrice de permutation de trace $n-2$ vérifie nécessairement $\sigma(k) = k$ pour $n-2$ valeurs.
   Soit i et j les deux valeurs restantes. On a forcément $\sigma(i) = j$ et $\sigma(j) = i$ car σ est bijective.
   Soit τ la permutation définie par $\tau(k) = k$ pour $k \geq 2$ et $\tau(1) = 1$ et $\tau(2) = 1$ et f_τ canoniquement associée à τ. On a $f_\tau(e_1) = e_2$, $f_\tau(e_2) = e_1$ et $f_\tau(e_k) = e_k$. Pour $k \geq 2$. En posant $e'_i = e_1$, $e'_j = e_2$ et en choisissant comme on veut les e'_l $l \notin \{i,j\}$ parmi les e_k, $k \geq 2$ de manière à les prendre tous, on aura $f_\tau(e'_i) = e'_j$, $f_\tau(e'_j) = e'_i$ et $f_\tau(e'_l) = e_l$. Pour $l \notin \{i,j\}$.
   On en déduit que P_σ est semblable à P_τ
   Soit σ' une deuxième de permutation de trace $n-2$.
   P_σ est semblable à P_τ et $P_{\sigma'}$ est semblable à P_τ donc P_σ est semblable à $P_{\sigma'}$

Produit avec une matrice de permutation

1. Par définition, il y a exactement un 1 par colonne d'une matrice de permutation.
Soit j_1 et j_2 distincts dans $[[1,n]]$ on a $\sigma(j_1) \neq \sigma(j_2)$ (injectivité) donc les 1 sur les colonnes j_1 et j_2 ne sont pas sur la même ligne. On en déduit qu'il y a au plus un 1 par ligne. Or il y a en tout n coefficients égaux à 1 donc il y a exactement un coefficient égal à 1 par ligne et les autres coefficients sont nuls.
Réciproquement, s'il y a il y a exactement un coefficient égal à 1 par ligne et par colonne, on peut, pour chaque $j \in [[1,n]]$ noter $\sigma(j)$ le numéro de la ligne de la place du 1 sur la colonne j. Comme il y a exactement un coefficient égal à 1 par ligne, σ est injective donc bijective (cardinal de l'ensemble de départ égal au cardinal de l'ensemble d'arrivée).

2. Il y a autant d'éléments de $\mathcal{P}_n$ que de permutations de $[[1,n]]$ donc il y en a $n!$.
Autre façon de voir. Comment construire une matrice de permutation quelconque:
- On choisit la place du 1 sur la colonne 1: n choix
- Pour chaque choix de la place du 1 sur la colonne 1, on choisit la place du 1 sur la colonne 2: $n-1$ choix
- $\vdots$
- Pour chaque choix de la place du 1 sur les colonnes $1,2,\ldots,i$, on choisit la place du 1 sur la colonne i: $n-i$ choix
- et ainsi de suite jusqu'à la colonne n où il y a y un choix.
On en déduit qu'il y a $n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$ matrices de permutation.

3. Produit et inverse

   (a) On a $f_\sigma(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} (P_\sigma)_{i,j} e_i = e_{\sigma(j)}$.

   (b) On en déduit que $f_{\sigma'} \circ f_\sigma(e_j) = f_{\sigma'}\left(e_{\sigma(j)}\right) = e_{\sigma'(\sigma(j))} = e_{\sigma'\circ\sigma(j)} = f_{\sigma'\circ\sigma}(e_j)$
   On a donc $f_{\sigma'} \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma'\circ\sigma}$ car les images des vecteurs de la base $(e_1,\ldots,e_n)$ sont les mêmes et en passant aux matrices dans la base canonique, $P_{\sigma'} \times P_\sigma = P_{\sigma'\circ\sigma}$.

   (c) Soit σ^{-1} la bijection réciproque de la bijection σ. D'après la question précédente, $P_{\sigma'} \times P_\sigma = P_{\sigma'\circ\sigma} = P_{id}$ avec $id : [[1,n]] \to [[1,n]]$ donc $P_{id} = I_n$ et P_σ est inversible d'inverse $(P_\sigma)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$.

   (d) Posons $C = AP_\sigma$ On a $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} \times (p_\sigma)_{k,j} = a_{i,\sigma(j)}$ car $(p_\sigma)_{k,j} = 0$ sauf pour $k = \sigma(j)$. La colonne j de AP_σest donc égale à la colonne $\sigma(j)$ de la matrice A.

4. On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de permutation.

   (a) Soit $C = BP_\sigma$ et $D = P_\sigma B$. On a $c_{i,j} = b_{i,\sigma(j)}$ et $d_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} (p_\sigma)_{i,k} \times b_{k,j} = b_{\sigma^{-1}(i),j}$
   car $(p_\sigma)_{i,k} = 1 \Leftrightarrow i = \sigma(k) \Leftrightarrow k = \sigma^{-1}(i)$.
   On en déduit que $BP_\sigma = P_\sigma B$ si et seulement si $\forall (i,j) \in [|1,n|]^2$, $b_{i,\sigma(j)} = b_{\sigma^{-1}(i),j}$. Or σ^{-1} est une bijection de $[[1,n]]$ donc en posant $l = \sigma^{-1}(i)$ on déduit que $BP_\sigma = P_\sigma B$ si et seulement si $\forall (l,j) \in [|1,n|]^2$, $b_{\sigma(l),\sigma(j)} = b_{l,j}$.

   (b) En posant $\sigma(i) = k$ et $\sigma(j) = l$, il reste $n-2$ valeurs de $\sigma(k)$ deux à deux distinctes dans $[[1,n]] \setminus \{k,l\}$ à préciser pour définir une bijection.
   Cela revient donc à définir une bijection de $[[1,n]] \setminus \{i,j\}$dans $[[1,n]] \setminus \{k,l\}$ qui ont le même cardinal $n-2$. Il y en donc $(n-2)!$. Il existe donc $(n-2)!$ permutations σ vérifiant $\sigma(i) = k$ et $\sigma(j) = l$.

   (c) Soit $B \in \mathcal{L}$. On a $b_{\sigma(i),\sigma(j)} = b_{i,j}$ pour tout couple (i,j) et toute permutation σ. Si $i \neq j$ $b_{i,j}$ (élément non diagonal de B) est égal à tout $b_{\sigma(i),\sigma(j)}$ donc à tout $b_{k,l}$ avec $k \neq l$ d'après la question précédente: les éléments non diagonaux de B sont tous identiques
   De plus, $b_{\sigma(i),\sigma(i)} = b_{i,i}$ pour toute permutation σ et il pour tout couple (i,j) il existe une permutation vérifiant $\sigma(i) = j$ donc les éléments diagonaux de B sont tous identiques donc B est de la forme

$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Réciproquement, la matrice I_n commute avec P_σ et si B_0 est la matrice dont les coefficients valent tous 1, on a $B_0 \times P_\sigma = B_0 = P_\sigma \times B_0$. Comme $M_{\alpha,\beta} = \beta B_0 + (\alpha - \beta) I_n$, on déduit que $M_{\alpha,\beta} \times P_\sigma = P_\sigma \times M_{\alpha,\beta}$.

Exercice: Deux preuves d'une égalité combinatoire

1. (a) On intègre par parties :

$$B(n,p) = \int_0^1 t^n (1-t)^p \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} (1-t)^p \right]_0^1 + \int_0^1 p \frac{t^{n+1}}{n+1} (1-t)^{p-1} \, \mathrm{d}t = \frac{p}{n+1} B(n+1, p-1).$$

À partir de cette relation, on obtient par récurrence que

$$\forall k \leqslant p, B(n,p) = p \ldots (p-k+1) \frac{n!}{(n+k)!} B(n+k, p-k).$$

Pour $k = p$, $B(n,p) = \dfrac{n!\, p!}{(n+p)!} B(n+p, 0) = \dfrac{n!\, p!}{(n+p+1)!}$.

(b) Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \frac{n!(m-1)!}{(n+m)!} &= \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^n \mathrm{d}t = \int_0^1 t^{m-1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k t^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{m+k-1} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{m+k}. \end{aligned}$$

2. (a) On montre par récurrence sur n la relation demandée.

- Pour $n = 0$, soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\Delta^0(u)_p = u_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{1}{k} (-1)^k u_{p+k}$.
- Supposons maintenant le résultat à un certain rang $n \geqslant 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\Delta^{n+1}(u)_p = \Delta^n(\Delta(u))_p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \Delta(u)_{p+k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (u_{p+k+1} - u_{p+k}).$$

Après décalage d'indice et utilisation de la formule de Pascal, on obtient :

$$\Delta^{n+1}(u)_p = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} u_{p+k}.$$

La propriété est initialisée et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout n.
Remarque: On a $\Delta = T - id$ avec $T(u) = (u_{p+1})_{p \in \mathbb{N}^*}$. L'application T est linéaire et commute avec id. On en déduit que (binôme) $\Delta^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^k (-1)^{n-k} id^{n-k}$ et $T^k(u) = (u_{p+k})_{p \in \mathbb{N}^*}$ donc $\Delta^n(u)_p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} u_{p+k}$.

(b) Prenons la suite $u = \left(\frac{1}{p}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$.

On a $\Delta(u)_p = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p} = \frac{-1}{p\,(p+1)} = \frac{(p-1)!}{(p+1)!} \times (-1)^1$.

$\Delta^2(u)_p = -\left(\frac{1}{(p+1)\,(p+2)} - \frac{1}{p\,(p+1)}\right) = -\frac{-2}{p\,(p+1)\,(p+2)} = \frac{(p-1)! \times 2!}{(p+2)!} \times (-1)^2$.

D'une part, par récurrence sur n, on obtient que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \Delta^n(u)_p = \frac{(p-1)!n!}{(p+n)!}(-1)^n.$$

D'autre part, la question (2.a.) donne

$$\Delta^n(u)_p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{1}{p+k}.$$

En égalant les deux termes, on obtient l'égalité $(\mathcal{E})$.