DM4 (pour le 4 octobre 2024)

Exercice 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B et C des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit M la matrice de taille $2n$ définie par blocs $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 2A \\ \hline B & C \end{array}\right)$ et $N = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 2I_n \\ \hline 0_{n,n} & -I_n \end{array}\right)$

Q 1 *Calculer* $N \times M$*.*

Q 2 *En déduire une expression de* $\det(M)$ *à l'aide de* $\det(A)$ *et* $\det(2B - C)$

Exercice 2: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit M la matrice de taille $2n$ définie par blocs $M = \left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline I_n & I_n \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et f l'application linéaire canoniquement associée à M.

On note $(e_1, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$.

Q 3 *Préciser* $f(e_1)$ *et* $f(e_{n+1})$*.*

Q 4 *Déterminer* n *plans vectoriels* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *stables par* f *et vérifiant* $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = \mathbb{R}^{2n}$*.*

Q 5 *En déduire une matrice* P *inversible de taille* $2n$ *telle que* $P^{-1}MP$ *soit diagonale par blocs avec* n *blocs diagonaux de taille* 2 *identiques.*

Exercice 3: Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, f l'application linéaire canoniquement associée à A et (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Q 6 *Montrer qu'il existe une base* b *de* $\mathbb{R}^4$ *dans laquelle la matrice de* f *est une matrice définie par blocs de la forme* $A_1 = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$.
Préciser un plan vectoriel F *de* $\mathbb{R}^4$ *stable par* f*.*

Q 7 *Soit* $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ *vérifiant* $u \circ f = f \circ u$*. Montrer que* F *est stable par* u*.*

Q 8 *Soit* $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$*. On suppose que* $M^2 = A$*. On note* u *l'application linéaire canoniquement associée à* M*.*

1. *Justifier que* F *est stable par* u*.*
2. *En déduire que la matrice de* u *dans la base* b *est de la forme* $M_1 = \left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & S \end{array}\right)$ *ou* Q*,* R *et* S *sont des matrices réelles carrées de taille* 2*.*
3. *Justifier qu'alors* $Q^2 = B$*.*
4. *En remarquant que* $\det(B) < 0$*, justifier qu'il n'existe pas de matrice* $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ *vérifiant* $M^2 = A$*.*

Exercice 4: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que $\begin{cases} \forall (i,j) \in [[1,n]]^2, \ m_{i,j} \geq 0 \\ \forall j \in [[1,n]]^2, \ \sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,j} \leq 1 \end{cases}$.

Q 9 *Montrer que* $|\det(M)| \leq 1$.

Exercice 5: On considère $\theta \in]0,\pi[$ et on pose $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$ et $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n-1} \cos(n\theta)$.

Q 10 *Montrer que* $|s_n| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}$ *(on pourra passer par les complexes).*

Q 11 *Etudier le sens de variation de la fonction* $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ *sur* $[2,+\infty[$.

Q 12 *Montrer que* $\sum\limits_{k=2}^{n} u_k = \sum\limits_{k=2}^{n} (f(k) - f(k+1)) s_k + f(n+1) s_n - f(2) s_1$.

Q 13 *En déduire la convergence de la série* $\sum u_n$.

Q 14 *Montrer que* $|u_n| \geq \frac{1}{2} f(n)(1+\cos(2n\theta))$. *En déduire la nature la série* $\sum |u_n|$.

Correction du DM 4

Exercice 1:

R 1 $M \times N = \left(\begin{array}{c|c} A & 2A \\ \hline B & C \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} I_n & 2I_n \\ \hline 0_{n,n} & -I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,n} \\ \hline B & 2B-C \end{array}\right)$

R 2 *On a donc* $\det(MN) = \det(M) \times \det(N) = \det \left(\begin{array}{c|c} A & 0_{n,n} \\ \hline B & 2B-C \end{array}\right) = \det(A) \times \det(2B-C)$ *par la formule du déterminant triangulaire par blocs.*
Or $\det(N) = \det \left(\begin{array}{c|c} I_n & 2I_n \\ \hline 0_{n,n} & -I_n \end{array}\right) = 1$ *(matrice triangulaire) donc* $\det(M) = \det(A) \times \det(2B-C)$.

Exercice 2:

R 3 *En observant la première colonne et la* $(n+1)^{\text{ème}}$ *colonne de* M, *on obtient* $f(e_1) = e_1 + e_{n+1} = f(e_{n+1})$.

R 4 *Soit* $i \in [[1,n]]$. *En observant la* $i^{\text{ème}}$ *colonne et la* $(n+i)^{\text{ème}}$ *colonne de* M,
on a $\left\{\begin{array}{l} f(e_i) = e_i + e_{n+i} \in vect(e_i, e_{n+i}) \\ f(e_{n+i}) = e_i + e_{n+i} \in vect(e_i, e_{n+i}) \end{array}\right.$.
On en déduit que $F_i \in vect(e_i, e_{n+i})$ *est (un plan car* (e_i, e_{n+i}) *est libre) stable par* f.
La famille $b' = (e_1, e_{n+1}, \ldots e_i, e_{n+i}, \ldots, e_n, e_{2n})$ *est, à l'ordre près, la base canonique donc est une base de* $\mathbb{R}^{2n}$ *donc* $F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = \mathbb{R}^{2n}$.

R 5 *La matrice de l'endomorphisme induit par* f *sur* F_i *dans la base* (e_i, e_{n+i}) *est* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
On en déduit que la matrice de f *dans la base* b' *est diagonale par blocs avec* n *blocs diagonaux de taille* 2 *égaux à* A.
On a donc $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} A & 0_{2,2} & \cdots & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & \cdots & 0_{2,2} & A \end{pmatrix}$ *avec* $P = P_{b \to b'}$ *où* b *est la base canonique. On a donc*

$$P = mat_b((e_1, e_{n+1}, e_2, e_{n+2}, \ldots e_n, e_{2n})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & & & & & \\ & & 0 & & & & 0 & \\ & 0 & & & & & 1 & \\ & 1 & & 0 & \cdots & \cdots & & \\ & 0 & & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3:

R 6 *On a* $\left\{\begin{array}{l} f(e_2) = e_2 + 2e_4 \\ f(e_3) = 2e_2 + e_4 \end{array}\right.$ *.donc* $F = vect(e_2, e_4)$ *est stable par* f. *La famille* $b = (e_2, e_4, e_1, e_3)$ *est une base de* $\mathbb{R}^4$ *et*

On en déduit que $A_1 = mat_{b'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$.

R 7 *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ vérifiant $u \circ f = f \circ u$.*
On admet que F est stable par u.

R 8 *On suppose que $M^2 = A$.*

1. *On a $M^2 = A$ donc $u^2 = f$ donc $u \circ f = u^3 = f \circ u$.donc Montrer que F est stable par u.*
2. *On a donc $u(e_2) \in vect(e_2, e_4)$ et $u(e_4) \in vect(e_2, e_4)$ donc la matrice de u dans la base b est de la forme $M_1 = \left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & S \end{array}\right)$ ou Q, R et S sont de taille 2.*
3. *Si P est la matrice de passage de la base canonique vers b, on a $\begin{cases} M^2 = A \\ A_1 = P^{-1}AP \\ M_1 = P^{-1}MP \end{cases}$ donc $A_1 = P^{-1}M^2P = M_1^2$*

   donc $\left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & S \end{array}\right)^2 = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$ donc d'après les propriétés du produit par bloc, $Q^2 = B$.
4. *Or $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$ et $\det(Q^2) = \det(Q)^2 > 0$ donc $Q^2 \neq B$. On en déduit qu'il n'existe pas de matrice M vérifiant $M^2 = A$.*

Exercice 4:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que $\begin{cases} \forall (i,j) \in [[1,n]]^2, \ m_{i,j} \geq 0 \\ \forall j \in [[1,n]]^2, \ \sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,j} \leq 1 \end{cases}$.

R 9 *Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$*
Si $n = 1$ $\det(M) = m_{1,1}$ et $0 \leq m_{1,1} \leq 1$ par hypothèse donc $|\det(M)| \leq 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat vrai pour n.
Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. On suppose que $\begin{cases} \forall (i,j) \in [[1,n+1]]^2, \ m_{i,j} \geq 0 \\ \forall j \in [[1,n+1]]^2, \ \sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,j} \leq 1 \end{cases}$.
Le développement par rapport à C_1 donne $\det(M) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} m_{i,1} \det(M_{i,1})$.
avec $M_{i,1}$ obtenue de M en supprimant la ligne i et la colonne 1.
On en déduit qu'elle est de taille n, que ses coefficient sont positifs et que la somme des coefficients d'une ligne est inférieure ou égale à 1 car elle est inférieure ou égale à la somme des coefficients de la ligne correspondant dans M (avec un coeff positif en pluis)
Par (HR), $|\det(M_{i,1})| \leq 1$ donc $m_{i,1} |\det(M_{i,1})| \leq m_{i,1}$ car $m_{i,1} \geq 0$ donc (inégalité triangulaire) on a
$|\det(M)| = \sum\limits_{i=1}^{n+1} m_{i,1} |\det(M_{i,1})| \leq \sum\limits_{i=1}^{n+1} m_{i,1} \leq 1$

Exercice 5:

R 10 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k\right) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{i\theta} - e^{i(k+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right)$ *car $e^{i\theta} \neq 1$. On en déduit que* $|s_n| \leq \left|\dfrac{e^{i\theta} - e^{i(k+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}\right| \leq \dfrac{\left|e^{i\theta}\right| + \left|e^{i(k+1)\theta}\right|}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}$.

R 11 *La fonction f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{\dfrac{(x-1)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x-1)^2} = \dfrac{-1-x}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0$ sur $[2, +\infty[$ donc f est décroissante sur $[2, +\infty[$.*

R 12 *On a* $\sum\limits_{k=2}^{n} u_k = \sum\limits_{k=2}^{n} f(k)\cos(k\theta)$. *Or* $\cos(k\theta) = s_k - s_{k-1}$ *donc*

$\sum\limits_{k=2}^{n} u_k = \sum\limits_{k=2}^{n} f(k)(s_k - s_{k-1}) = \sum\limits_{k=2}^{n} f(k)\, s_k - \sum\limits_{k=2}^{n} f(k)\, s_{k-1} = \sum\limits_{k=2}^{n} f(k)\, s_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(k+1)\, s_k$

$\sum\limits_{k=2}^{n} u_k = \sum\limits_{k=2}^{n} (f(k) - f(k+1))\, s_k + f(n+1)\, s_n - f(2)\, s_1$ *(le calcul dans lequel on remplace* a_i *par* $S_i - S_{i-1}$ *dans* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$ *est appelé transformation d'Abel). On a* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1)\, s_n$ *car* (s_n) *est bornée (Q1) et* $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.
Montrons que la série $\sum (f(k) - f(k+1))\, s_k$ *est absolument convergente:*
on a $|(f(k) - f(k+1))\, s_k| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|} \times (f(k) - f(k+1))$ *car* f *est décroissante et la série* $\sum (f(k) - f(k+1))$ *est convergente (sommes partielles télescopiques et* $\lim\limits_{+\infty} f = 0$*). On en déduit que la série* $\sum (f(k) - f(k+1))\, s_k$ *est absolument convergente donc convergente. La suite des sommes partielles* $\left(\sum\limits_{k=2}^{n} u_k\right)_n$ *est donc convergente donc la série* $\sum u_n$ *converge.*

R 13 *On a* $|\cos(n\theta)| \geq \cos^2(n\theta) = \dfrac{1+\cos(2n\theta)}{2}$ *donc* $|u_n| \geq \frac{1}{2} f(n)(1+\cos(2n\theta))$. *La série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(n)\cos(2n\theta)$ *converge (remplacer* θ *par* 2θ *dans ce qui précède). De plus* $f(n) \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *donc la série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(n)$ *diverge. On en déduit que la série* $\sum |u_n|$ *diverge.*