PSI DS 2 (le mercredi 4 octobre 2023)

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Questions proches du cours

Cours1: Montrer que l'intégrale généralisé $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(u)}{u} du$ est convergente.

Cours2: Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques réelles de taille 3 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

Cours 3: Soit (a_n) une suite de réels. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ admet une rayon de convergence $R > 0$. On pose, pour $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Montrer que f est paire si et seulement si $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$.

Cours 4: Déterminer le rayon de convergence de $\sum \dfrac{3^n}{n} x^{2n}$.

Cours 5: Donner le rayon de convergence et la somme des séries entières $\sum nx^n$ et $\sum n^2 x^n$ (pour x réel).

Cours 6: Montrer que la fonction $f : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x} \end{array} \right.$ admet un prolongement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$

Q 1 *Justifier que la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f'(x)$.*

Q 2 *On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ vérifiant: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{a}{x - j} + \dfrac{b}{x - j^2}$.*

Q 3 *En déduire une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.*

Exercice 2

Le but de l'exercice est d'obtenir un développement en série entrière de la fonction arcsinus

Première méthode: équation différentielle

On pose, pour $x \in \left]-1,1\right[$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Q 4 *Justifier que la fonction f est dérivable sur $\left]-1,1\right[$ et vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur l'intervalle $\left]-1,1\right[$.*

Q 5 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.*
On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ admet un rayon de convergence $R > 0$.
On pose, pour $x \in \left]-R,R\right[$, $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on suppose que

$$\forall x \in \left]-R,R\right[, \left(1-x^2\right) y'(x) - xy(x) = 0 : (E).$$

1. *Montrer que $a_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{(n+1)\,a_n}{n+2}$.*
2. *En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$ une expression de a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p et a_0 utilisant des factorielles et des puissances.*
3. *Déterminer la valeur de R.*

Q 6 *En.déduire que f admet un développement en série entière sur $\left]-1,1\right[$ et préciser ce développement.*

Deuxième méthode: Recours à un développement connu

Q 7 *En utilisant le développement en série entière connu de $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, retrouver le résultat de la question précédente.*

Conclusion

Q 8 *Déduire de ce qui précède que la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ admet un développement en série entière sur $\left]-1,1\right[$ et préciser ce développement.*

Exercice 3

On rappelle que les fonctions cosinus et sinus hyperboliques sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $F_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\cosh(x))^n} \mathrm{d}x.$

Q 9 *Montrer que l'intégrale généralisé F_n est convergente.*

Q 10 *Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $v(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$. Justifier que u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ v'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

Q 11 *En déduire que* $F_2 = 1$.

Q 12 *À l'aide du changement de variable* $u = e^x$, *montrer que* $F_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Q 13 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *montrer que* $F_{n+2} = \dfrac{n}{n+1} F_n$.

Q 14 *Étudier la monotonie de la suite* (F_n).

Q 15 *Justifier que la suite* $(nF_{n+1}F_n)$ *est constante.*

Q 16 *Déduire des questions précédentes que* $F_{n+1} \sim_{n\to+\infty} F_n$, *puis que* $F_n \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Q 17 *Exprimer* F_{2n+1} *en fonction de* $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier $n \geq 2$, soient $u_n = \ln\left(\dfrac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n}\right) \quad v_n = u_n + \dfrac{1}{2(n-1)}$ $(n \geq 2)$.

Q 18 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *calculer l'intégrale* $\displaystyle\int_n^{n+1} (x-n)(n+1-x) \times \frac{1}{2x^2}\,\mathrm{d}x$ *; on la notera* I_n.
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \left(n + \dfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln n) - 1 \leq \dfrac{1}{2n^2}$.

Q 19 *Montrer que les suites* $(u_n)_{n\geq 2}$ *et* $(v_n)_{n\geq 2}$ *sont adjacentes.*

Q 20 *En déduire la formule de* STIRLING *:* $n! \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Problème:

Toutes les matrices intervenant dans ce problème sont à coefficients réels et $n \in \mathbb{N}^*$.

Si $(i,j) \in [|1,n|]^2$, la matrice élémentaire $E_{i,j}$ est la matrice carrée de taille n dont les coefficients sont tous nuls exceptés le coefficient i,j qui vaut 1.

Le but du problème est de montrer que pour toute matrice carrée M de trace nulle, il existe deux matrices carrées X et Y de même taille que M vérifiant $M = XY - YX$.

Etude d'un exemple:

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit f l'application linéaire canoniquement associée à M et (e_1, e_2) la base canonique de $E = \mathbb{R}^2$.

Q 21 *Justifier que la famille* $(e_1, f(e_1))$ *est une base de* E. *Calculer* $f \circ f(e_1)$.

Q 22 *En déduire qu'il existe une matrice* P *inversible telle que* $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Préciser la valeur de la matrice* P *obtenue.*

Q 23 *On pose* $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Déterminer une matrice* $X_1 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *vérifiant* M_1 *sous forme* $X_1Y_1 - Y_1X_1$.

Q 24 *En déduire qu'il existe deux matrices carrées* X *et* Y *de taille 2 vérifiant* $M = XY - YX$.

Etude du problème pour les matrices à diagonale nulle

Une matrice $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite à diagonale nulle si et seulement si $\forall i \in [[1,n]]$, $m_{i,i} = 0$.

On note F_n le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices à diagonale nulle et D_n le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices diagonales.

Le but de cette partie est de montrer que pour toute matricce à diagonale nulle, il existe deux matrices carrées X et Y de même taille que M vérifiant $M = XY - YX$.

On considère une matrice diagonale de taille n, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$.

Soit l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi(A) = AD - DA$.

Q 25 *Montrer que l'application φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Q 26 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
Exprimer les coefficients de la matrice $\varphi(A)$ en fonction des coefficients de la matrice A.

Q 27 *En déduire que* $\ker(\varphi) = D_n$ *et préciser* $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Q 28 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à diagonale nulle.*
Montrer qu'il existe $(X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telle que $M = XY - YX$. Y-a-t-il unicité du couple (X,Y) obtenu?

Etude d'un deuxième exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit f canoniquement l'endomorphisme canoniquement associé à B, c'est-à-dire que si (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $mat_{(e_1,e_2,e_3)}(f) = M$.
On pose $u_1 = e_1$, $u_2 = f(e_1)$ et $u_3 = f(u_2)$.

Q 29 *Préciser les valeurs de u_2 et u_3 et justifier que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.*

Q 30 *Ecrire la matrice M' de f dans la base (u_1, u_2, u_3).*

Q 31 *En utilisant la partie précédente, montrer qu'il existe un couple de matrices $(X,Y) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$ vérifiant $M = XY - YX$.*

Q 32 *Expliciter des matrices $(X,Y) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$ vérifiant $M = XY - YX$ à l'aide de la matrice M', de la matrice D de la partie précédente et de la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) vers (u_1, u_2, u_3). (On ne fera pas le calcul explicite des coefficients de ces matrices).*

Etude des matrices de trace nulle

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la trace de M est nulle et f l'endomorphisme canoniquement associé à M. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de f.

Q 33 *On suppose que M n'est pas la matrice nulle. Justifier que $n \geq 2$ et montrer qu'il existe $e \in \mathbb{R}^n$ tel que $(e, f(e))$ est libre.*

Q 34 *Montrer qu'il existe $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant;*

$$M' \text{ est à diagonale nulle}$$
$$M' \text{ est semblable à } M$$

Q 35 *En déduire qu'il existe $(X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $M = XY - YX$.*

Q 36 *Justifier que $\left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists (X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, M = XY - YX\right\}$ est un espace sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.*

Correction DS2

Exercice 1

R 1 *$\forall x\in\mathbb{R}$, $1+x+x^2>0$ (car $\Delta<0$). La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\dfrac{2x+1}{1+x+x^2}$.*

R 2 *On a $1+x+x^2=(x-j)(x-j^2)$ avec $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\dfrac{a}{x-j}+\dfrac{b}{x-j^2}=\dfrac{(a+b)x-aj^2-bj}{1+x+x^2}$.*
Le système $\begin{cases} a+b=2\\ -aj^2-bj=1\end{cases}$ a pour solution $(a,b)=(1,1)$ donc $f'(x)=\dfrac{1}{x-j}+\dfrac{1}{x-j^2}$.

R 3 *On a donc $f'(x)=\dfrac{-j^2}{1-\frac{x}{j}}+\dfrac{-j}{1-\frac{x}{j^2}}$(car $j^3=1$).*
Si $|x|<1$, alors $f'(x)=\dfrac{-j^2}{1-\frac{x}{j}}+\dfrac{-j}{1-\frac{x}{j^2}}=-j^2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{j}\right)^n-j\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{j^2}\right)^n$ donc
$f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(-j^{2n+2}-j^{n+1}\right)x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}-2\cos\left(\dfrac{2(n+1)\pi}{3}\right)x^n$ car $j^2=\bar{j}$
donc $j^{2n+2}-j^{n+1}=\overline{j^{n+1}}+j^{n+1}=2\operatorname{Re}\left(j^{n+1}\right)$.
Le théorème d'intégration terme à terme des séries entières entraîne que
$f(x)=f(0)-2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\cos\left(\dfrac{2(n+1)\pi}{3}\right)\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=-2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\cos\left(\dfrac{2(n+1)\pi}{3}\right)\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Exercice 2

R 4 *On a $1-x^2>0$ pour $x\in\left]-1,1\right[$ et la fonction racine est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$*
donc $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ est définie et dérivable sur $\left]-1,1\right[$ donc f est dérivable sur $\left]-1,1\right[$ et
$f(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ donc $f'(x)=-2x\times\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.
On a $(1-x^2)f'(x)=xf(x)$ donc f vérifie l'équation différentielle $(E):(1-x^2)y'-xy=0$.

R 5 *Analyse*

1. *D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries entières, y est dérivable et pour tout $x\in\left]-R,R\right[$, $y'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$. On a donc*

$$\begin{aligned}
(1-x^2)y'(x)-xy(x)=0 &\Leftrightarrow (1-x^2)\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-x\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0\\
&\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1\to 0}^{+\infty}na_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1}=0\\
&\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_nx^{n+1}=0\\
&\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}na_{n-1}x^n=0\\
&\Leftrightarrow a_1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)a_{n+1}-na_{n-1}\right)x^n=0
\end{aligned}$$

donc, par unicité du développement en série entière,
$(1-x^2)y'(x)-xy(x)=0\Leftrightarrow a_1=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(n+1)a_{n+1}-na_{n-1}$. Donc

$$\left(1-x^2\right)y'(x)-xy(x)=0\Leftrightarrow a_1=0 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},(n+2)a_{n+2}-(n+1)a_n=0 \text{ soit } a_{n+2}=\frac{(n+1)a_n}{n+2}$$

2. *On a* $a_1 = 0$ *et* $a_3 = \dfrac{2a_n}{3}$ *donc* $a_3 = 0$. *On montre par récurrence que* $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$.

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \frac{(2p-1)}{2p} a_{2p-2} \\ &= \frac{(2p-1)}{2p} \frac{(2p-3)}{(2p-2)} a_{2p-4} \\ &= \frac{(2p-1)}{2p} \frac{(2p-3)}{(2p-2)} \frac{(2p-5)}{(2p-4)} a_{2p-6} \\ &\vdots \\ &= \frac{(2p-1)}{2p} \frac{(2p-3)}{(2p-2)} \frac{(2p-5) \times \cdots \times 1}{(2p-4) \times \cdots \times 2} a_0 \end{aligned}.$$

On a donc $a_{2p} = \dfrac{\prod_{k=0}^{p-1} (2k+1)}{\prod_{k=1}^{p} 2k} = \dfrac{\prod_{k=0}^{p-1} (2k+1) \times \prod_{k=1}^{p} 2k}{\left(\prod_{k=1}^{p} 2k\right)^2} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2} a_0$.

3. *On a donc* $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p}$. *Posons pour* $x \neq 0$, $u_p = a_{2p} x^{2p}$.

On a $\left|\dfrac{u_{p+1}}{u_p}\right| = \left|\dfrac{a_{2p+2} x^2}{a_{2p}}\right| = \dfrac{2p+1}{2p+2} x^2 \to_{p \to +\infty} x^2$ *donc (d'Alembert)*

Si $x^2 < 1$ *alors* $\sum a_{2p} x^{2p}$ *converge absolument et si* $x^2 > 1$ *alors* $\sum a_{2p} x^{2p}$ *diverge donc* $R = 1$.

R 6 *La fonction* f *vérifie* $\begin{cases} f'(x) - \dfrac{x}{(1-x^2)} f(x) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ *et si* $a_0 = 1$, $\begin{cases} y'(x) - \dfrac{x}{(1-x^2)} y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ *donc, d'après le théorème de Cauchy,* $f = y$. *On en déduit que* $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2} x^{2p}$.

R 7 *On a, pour* $x \in]-1, 1[$, $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ *avec* $b_0 = 1$ *et*

$$b_n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} = \frac{\frac{(-1)^n}{2^n} \times 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{n!}$$

donc $b_n = \dfrac{\frac{(-1)^n}{2^n} \times \frac{(2n)!}{2^n n!}}{n!} = \dfrac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2}$. *On en déduit que,* $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}$.

R 8 *La fonction* $x \mapsto \arcsin(x)$ *est une primitive de* f *sur* $]-1, 1[$ *donc d'après le théorème d'intégration terme à terme des séries entières,*

$$\forall x \in]-1, 1[\,, \arcsin(x) = \arcsin(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1}.$$

Exercice 3

R 9 *On a* $\cosh(x) \geq 1$ *donc la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{(\cosh(x))^n}$ *est définie et continue sur* $[0, +\infty[$.

De plus, $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \sim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{2}$ *donc* $\dfrac{1}{(\cosh(x))^n} \sim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{e^x}\right)^n = 2^n e^{-nx} \geq 0$ *et l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx} \mathrm{d}x$ *est convergente car* $n > 0$ *donc l'intégrale généralisé* F_n *est convergente.*

R 10 *La fonction v est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (th opérations)*
et $v'(x) = \dfrac{\cosh(x)\times\cosh(x) - \sinh(x)\times\sinh(x)}{\cosh^2(x)} = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$.
On en déduit que $\displaystyle\int_0^X \frac{1}{\cosh^2(x)}\mathrm{d}x = [v(x)]_0^X = \frac{\sinh(X)}{\cosh(X)} = \frac{e^X - e^{-X}}{e^X + e^{-X}} \sim_{x\to+\infty} \frac{e^X}{e^X}$
donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{1}{\cosh^2(x)}\mathrm{d}x = 1$ *donc* $F_2 = 1$.

R 11 *On a* $\displaystyle F_1 = \int_0^{+\infty}\frac{1}{\cosh(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{2}{e^x + e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{2e^x}{(e^x)^2+1}\mathrm{d}x.$
La fonction $x\mapsto e^x$ est de classe C^1, strictement croissante et bijective de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$, donc

$$F_1 = \int_1^{+\infty}\frac{2}{u^2+1}\mathrm{d}u = [2\arctan(u)]_1^{+\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

R 12 *Dans* $\displaystyle F_{n+2} = \int_0^{+\infty}\frac{1}{(\cosh(x))^{n+2}}\mathrm{d}x$, *effectuons une IPP avec* $\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{(\cosh(x))^n},\ u'(x) = \dfrac{-n\sinh(x)}{(\cosh(x))^{n+1}} \\ v(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)},.v'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}. \end{cases}$.
Les fonctions u et v sont de classe C^1 et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = 1$ (voir question précédente)
D'où $\displaystyle F_{n+2} = [u(x)v(x)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{n\sinh(x)}{(\cosh(x))^{n+1}}\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{n\sinh^2(x)}{(\cosh(x))^{n+2}}\mathrm{d}x$
donc $\displaystyle F_{n+2} = \int_0^{+\infty}\frac{n\left(\cosh^2(x)-1\right)}{(\cosh(x))^{n+2}}\mathrm{d}x = n(F_n - F_{n+2})$. *On en déduit que* $F_{n+2} = \dfrac{n}{n+1}F_n$.

R 13 *On a pour $x\geq 0$, $\cosh(x)\geq 1$ donc $\dfrac{1}{(\cosh(x))^{n+1}} \leq \dfrac{1}{(\cosh(x))^n}$ donc par croissance de l'intégration $F_{n+1}\leq F_n$ donc* $\boxed{(F_n)\text{ est décroissante.}}$

R 14 *On a $F_{n+2} = \dfrac{n}{n+1}F_n$ donc $(n+1)F_{n+2}F_{n+1} = nF_nF_{n+1}$ donc la suite (nF_nF_{n+1}) est constante et vaut* $F_1F_2 = \dfrac{\pi}{2}$

R 15 *On a $F_n > 0$ (l'intégrale d'une fonction continue positive n'est nulle que si la fonction est nulle),*
donc $\dfrac{n}{n+1} \underset{Q2a}{=} \dfrac{F_{n+2}}{F_n} \underset{Q2b}{\leq} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} \leq 1$. *Par* $\boxed{\text{théorème d'encadrement,}}$ *on en déduit que* $\boxed{F_{n+1}\sim_{n\to+\infty} F_n.}$

R 16 *Or $(n+1)F_{n+2}F_{n+1} = nF_nF_{n+1}$, suite constante qui vaut $F_1F_2 = \dfrac{\pi}{2}$ (d'après les calculs précédents).*
D'où : $\dfrac{\pi}{2} = nF_{n+1}F_n \sim_{n\to+\infty} n(F_n)^2$, *comme $F_n\geq 0$, on en déduit que* $\boxed{F_n \sim_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}.}$

R 17 *On a* $F_{2n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}F_{2n-1} = \dfrac{2n-1}{2n}\times\dfrac{2n-3}{2n-2}F_{2n-3} = \dfrac{2n-1}{2n}\times\dfrac{2n-3}{2n-2}\times\cdots\times\dfrac{1}{2}F_1$
d'où $F_{2n+1} = \dfrac{(2n)!}{((2n)\times(2n-2)\times\cdots 2)^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2n)!}{(2^n\times n\times(n-1)\times\cdots\times 1)^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2n)!}{(2^n\times n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

R 18 *On a* $(x-n)(n+1-x) = -n^2 - n + 2nx + x - x^2$ *donc*
$\displaystyle I_n = \int_n^{n+1} -\tfrac{1}{2} + \frac{n+\frac{1}{2}}{x} - \frac{n(n+1)}{2x^2}\ \mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2} + \left[\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\ln(x) + \frac{n(n+1)}{2x}\right]_n^{n+1} = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln n) - 1.$
Si $x\in[n,n+1]$, *alors* $0\leq x-n\leq 1$ *et* $0\leq(n+1)-x\leq 1$ *et* $0\leq\dfrac{1}{2x^2}\leq\dfrac{1}{2n^2}$ *et* $0\leq(x-n)(n+1-x)\times\dfrac{1}{2x^2}\leq\dfrac{1}{2n^2}$.
Par $\boxed{\text{croissance de l'intégration}}$: $\displaystyle 0\leq I_n\leq\int_n^{n+1}\frac{1}{2n^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}$.

R 19 *Comme* $v_n - u_n = \dfrac{1}{2(n-1)}$, *il est clair que* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0.}$

De plus, $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!e^{n+1}}\right) - \ln\left(\dfrac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n}\right) = \ln\left(\dfrac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}}\dfrac{n!}{(n+1)!}\dfrac{1}{e}\right)$ *donc*

$u_{n+1} - u_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 = I_n \geq 0$ *d'après la question précédente. Donc* $\boxed{\textit{la suite } (u_n) \textit{ est croissante.}}$

Et $\boxed{(v_n) \textit{ décroissante}}$ *car :* $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2(n-1)} = u_{n+1} - u_n - \dfrac{1}{2n\,(n-1)} \leq I_n - \dfrac{1}{2n^2} \leq 0$ *car* $\dfrac{1}{2n\,(n-1)} \geq \dfrac{1}{2n^2}$.

R 20 *D'après la question précédente,* (u_n) *[et* (v_n)*] converge vers une limite* ℓ_0, *donc* $e^{u_n} \to e^{\ell_0} = \ell \neq 0$, *soit* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n} = \ell \neq 0$ *donc* $\boxed{n! \sim_{n\to+\infty} \dfrac{n^n\sqrt{n}}{\ell e^n}.}$

L'équivalent précédemement obtenu donne $\sqrt{\dfrac{\pi}{4n}} \sim_{n\to+\infty} F_{2n+1}$ *et*

$F_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\frac{(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{\ell e^{2n}}}{2^{2n}\left(\frac{n^n\sqrt{n}}{\ell e^n}\right)^2} = \dfrac{\pi\ell}{\sqrt{2n}}$. *D'où* $\boxed{\ell = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \textit{ et } n! \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n}$

Correction du problème:

R 21 *On a* $f(e_1) = e_1 + 3e_2$.*n'est pas colinéaire à* e_1 *donc la famille* $b' = (e_1, f(e_1))$ *est libre donc base de* $\mathbb{R}^2$. *On a* $f \circ f(e_1) = f(e_1 + 3e_2) = f(e_1) + 3f(e_2) = 7e_1$.

R 22 *On a donc* $mat_b(f) = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et donc donc* $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *avec* $P = P_{(e_1,e_2)}^{b'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

R 23 *Si* $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *alors* $XY_1 - Y_1X_1 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -b & 0 \end{pmatrix}$. *donc si* $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *alors* $M_1 = X_1Y_1 - Y_1X_1$

R 24 *On a* $M_1 = X_1Y_1 - Y_1X_1$ *et* $M = PM_1P^{-1}$ *donc* $M = PX_1Y_1P^{-1} - PY_1X_1P^{-1} = (PX_1P^{-1})(PY_1P^{-1}) - (PY_1P^{-1})(PX_1P^{-1})$. *On peut donc choisir* $X = (PX_1P^{-1})$ *et* $Y = (PY_1P^{-1})$. *(on peut poursuivre le calcul, ce qui n'était pas demandé:* $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *donc* $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{8}{3} \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

R 25 *On a bien* $\varphi(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *De plus, pour* λ, λ' *réels et* A *et* A' *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$\varphi(\lambda A + \lambda' A') = (\lambda A + \lambda' A')D - D(\lambda A + \lambda' A') = \lambda(AD - DA) + \lambda'(A'D - DA') = \lambda\varphi(A) + \lambda'\varphi(A')$.

R 26 *Soit* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a $AD = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 2a_{1,2} & \cdots & na_{1,n} \\ a_{2,1} & 2a_{2,2} & \cdots & na_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & 2a_{n,2} & \cdots & na_{n,n} \end{pmatrix} = (j \times a_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$ *et* $DA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 2a_{2,1} & 2a_{2,2} & \cdots & 2a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ na_{n,1} & na_{n,2} & \cdots & na_{n,n} \end{pmatrix} = (i \times a_{i,j})_{(i,j)}$
Posons $M = \varphi(A)$. *On a* $m_{i,j} = (j - i)a_{i,j}$.

R 27 $\varphi(A) = 0 \Leftrightarrow \forall(i,j) \in [[1,n]]^2, (j-i)a_{i,j} \Leftrightarrow \forall(i,j) \in [[1,n]]^2, j \neq i \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
soit $\varphi(A) = 0 \Leftrightarrow A$ *matrice diagonale donc* $\ker(\varphi) = D_n$.
Posons $M = \varphi(A)$. *On a* $\forall i \in [[1,n]], m_{i,i} = 0$ *donc* $M \subset F_n$ *donc* $\mathrm{Im}(\varphi) \subset F_n$.
Soit $M \in F_n$ *et* A *définie par* $a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ \dfrac{m_{i,j}}{(j-i)} \end{cases}$. *On a* $\varphi(A) = M$ *donc* $M \in \mathrm{Im}(\varphi)$ *donc* $\mathrm{Im}(\varphi) = F_n$.

R 28 *Soit* $M \in F_n = \mathrm{Im}(\varphi)$. *Il existe* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *tel que* $\varphi(A) = M$ *donc* $M = AD - DA$.
Soit $\Delta \in D_n = \ker(\varphi)$. *On a* $\varphi(A + \Delta) = \varphi(A) + \varphi(\Delta) = \varphi(A)$ *donc* $M = (A+\Delta)D - D(A+\Delta)$ *donc il n'y a pas unicité.*

R 29 *Soit* f *canoniquement associée à* B *et* (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$. *Posons* $u_1 = e_1$, $u_2 = f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$*et* $u_3 = f(u_2)$ *Le calcul* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *entraîne que* $u_3 = 3e_1 + e_2 + 2e_3$. *La famille* (u_1, u_2, u_3) *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *car* $\det_{(e_1,e_2,e_3)}(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

R 30 *On a* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ *donc* $f(u_3) = 2u_1 + 4u_2$ *et* $mat_{(u_1,u_2,u_3)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M'$

R 31 *On a* $M' = P^{-1}MP$ *avec* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $M' \in F_3$ *donc* $\exists A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *tel que* $\varphi(A) = M'$. *On a donc* $M' = AD - DA$ *donc* $M = P(AD - DA)P^{-1} = XY - YX$ *avec* $X = PAP^{-1}$ *et* $Y = PDP^{-1}$.

R 32 *.En reprenant les calculs faits dans la partie précédente,* $M' \in F_n$ *et* A *définie par* $a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ \dfrac{m_{i,j}}{(j-i)} \end{cases}$ *vérifie* $\varphi(A) = M'$.
Il suffit donc de prendre $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *pour avoir* $\varphi(A) = M'$. *Il suffit ensuite de prendre* $X = PAP^{-1}$ *et* $Y = PDP^{-1}$.

R 33 *Si, pour tout* x *la famille* $(x, f(x))$ *est liée, alors,* f *est de la forme* λid_E *(voir exercice fait en cours) donc* $tr(f) = tr(M) = n\lambda$ *or* $tr(M) = 0$ *donc* $\lambda = 0$ *ce qui contredit* $M \neq 0$ *donc il existe* x *tel que la famille* $(x, f(x))$ *est libre.*

R 34 *C'est la question la plus délicate. On reverra cette question avec une présentation matricielle plus tard.*
Montrons par récurrence du $n \in \mathbb{N}^*$ *que* $tr(M) = 0 \Rightarrow M$ *est semblable à une matrice à diagonale nulle.*
- $n = 1$: $tr(M) = 0 \Rightarrow M = 0$ *donc* M *est semblable (car égale) à une matrice à diagonale nulle*
- supposons la propriété vraie pour n. *Montrons la pour* $n + 1$.
Soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ *telle que* $tr(M) = 0$.
- si $M = 0$ M *est semblable (car égale) à une matrice à diagonale nulle*
- si $M \neq 0$ *et* f *canoniquement associé à* M.
il existe $e \in E$ *tel que* $(e, f(e))$ *est libre. On complète cette famille en un base notée* $b_1 = (e_1, \ldots, e_{n+1})$ *et on note* $M' = mat_{b_1}(f)$.
On a $f(e_1) = e_2$ *donc* $m'_{1,1} = 0$.
Posons $F = vect(e_1, \ldots, e_{n+1})$ *et* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *la matrice définie par* $a_{i,j} = m'_{i+1,i+1}$ *(on a donc* $M' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline C & A \end{array}\right)$ *ou* L *est une matrice ligne et* C *est une matrice colonne).*
Soit p *la projection sur* F *parallèlement à* $vect(e_1)$. *On a* $A = mat_{(e_2,\ldots,e_{n+1})}(p \circ f)$ *et* $tr(A) = 0$ *donc, par hypothèse de récurrence,* A *est semblable à une matrice* A' *à diagonale nulle donc il existe une base* $\left(e'_2, \ldots, e'_{n+1}\right)$ *de* F *dans laquelle* $A' = mat_{\left(e'_2,\ldots,e'_{n+1}\right)}(p \circ f)$. *On en déduit que* $mat_{\left(e_1,e'_2,\ldots,e'_{n+1}\right)}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline C' & A' \end{array}\right) = M''$*) (la ligne* L *est inchangée mais la colnne* C' *n'est pas la même). La matrice* M'' *est à diagonale nulle et est semblable à* M*, ce qui achève la récurrence.*

R 35 M *est semblable* M' *à diagonale nulle donc il existe* $(X', Y') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ *tels que* $M' = X'Y' - Y'X'$. *Soit* $P \in GL_n(\mathbb{R})$ *tel que* $M' = P^{-1}MP$.
On pose $X = PX'P^{-1}$ *et* $Y = PY'P^{-1}$. *On a bien* $M = XY - YX$.

R 36 *Soit* $E_1 = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, N = XY - YX\right\}$ *et* $E_2 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), tr(M) = 0\}$
D'après la question précédente, $E_2 \subset E_1$ *et si* $M \in E_1$*, on a donc* $tr(M) = tr(XY - YX) = tr(XY) - tr(YX) = 0$ $M \in E_2$ *donc* $E_1 \subset E_2$ *donc* $E_1 = E_2$.
On a $E_1 = \ker(tr)$ *où* tr *est une fomre linéaire non nulle de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *donc* $E_2 = E_1$ *est un espace vectoriel de dimension* $n^2 - 1$ *(hyperplan de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*).*