DS 2, le 9 octobre 2024 durée 4h (5 pages)

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Questions proches du cours:

Q 1 *Déterminer le développement en série entière de* $x \mapsto \arctan(x)$ *et préciser le domaine de validité de ce développement.*

Q 2 *Soit une série entière* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* $R > 0$. *On pose, pour* $x \in \left]-R, R\right[$ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. *Pour quelles valeurs du réel* x *est-on assuré de la convergence de la série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n+3}$ *?*
   Donner une expression de la somme de cette série à l'aide de f.

2. *Pour quelles valeurs du réel* x *est-on assuré de la convergence de la série entière* $\sum_{n\geq 0} a_{2n} x^{2n}$ *?*
   Donner une expression de la somme de cette série à l'aide de f.

Q 3 *Montrer que la fonction* f *définie sur* $\left]-1, 1\right[\setminus \{0\}$ *par* $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ *est prolongeable en une fonction de classe* C^∞ *sur* $\left]-1, 1\right[$.

Exercice 1:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice définie par blocs $B = \left(\begin{array}{c|c} 2A & A \\ \hline A & 3A \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Q 4 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $M = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline \alpha I_n & I_n \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.
Donner une valeur de α *pour laquelle* $M \times B$ *est une matrice triangulaire par blocs.*

Q 5 *En déduire une expression de* $\det(B)$ *en fonction de* $\det(A)$.

Exercice 2:

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Q 6 *Montrer que N est semblable à $N_1 = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & 2M \end{array}\right)$.*

Q 7 *Soit f l'application linéaire canoniquement associée à M et (e_1, e_2) la base canonique de $E = \mathbb{R}^2$. Déterminer $f(e_1 - e_2)$ et $f(e_1 + 3e_2)$.*

Q 8 *En déduire qu'il existe une matrice $P_1 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que $P_1^{-1} M P_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On précisera la matrice P_1 choisie.*

Q 9 *Soit $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice définie par bloc par $P = \left(\begin{array}{c|c} P_1 & 0 \\ \hline 0 & P_1 \end{array}\right)$. Justifier que P est inversible et exprimer P^{-1} sous forme de matrice définie par blocs à l'aide de P_1^{-1} (on ne demande pas de calculer les coefficients de P^{-1}).*

Q 10 *Déterminer $P^{-1} N_1 P$ et en déduire que N est semblable à une matrice diagonale.*

Exercice 3:

Le but de l'exercice est de démontrer par l'algèbre linéaire un résultat de cours sur les solutions particulières d'équations différenttielles.

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$

On considère des réels a, b, c, d et ω et on pose, pour $f \in E$, $\varphi(f) = f'' + af' + bf \in E$. On admet que φ est un endomorphisme de E.

On note $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par $y''(x) + ay'(x) + by(x) = c\sin(\omega x) + d\cos(\omega x)$.

Premier cas

On suppose que $a \neq 0$ ou $b \neq \omega^2$. On définit sur les deux fonctions $f_1 : x \mapsto \cos(\omega x)$ et $f_2 : x \mapsto \sin(\omega x)$.

Q 11 *Déterminer $\varphi(f_1)$ et $\varphi(f_2)$. En déduire que le plan vectoriel $F = vect(f_1, f_2)$ est stable par φ.*

Q 12 *On note φ_F l'endomorphisme induit par φ sur F.*
Montrer que φ_F est un isomorphisme (on pourra écrire la matrice de φ_F dans une base de F).

Q 13 *En déduire qu'il existe un unique couple $(e, g) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f : x \mapsto e\sin(\omega x) + g\cos(\omega x)$ est solution de $(\mathcal{E})$.*

Deuxième cas

On suppose que $a = 0$ et $b = \omega^2$.

Q 14 *Que suggérez vous de faire pour démontrer le résultat de cours sur les solutions particulières de $y''(x) + \omega^2 y(x) = c\sin(\omega x) + d\cos(\omega x)$?*
(On se contentera d'exposer la méthode sans le détail des calculs).

Exercice 4:

On se propose de déterminer des solutions développables en série entière de l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 : (\mathcal{E})$$

On considère une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$ et on pose, pour $x \in \left]-R, R\right[$,

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Q 15 *Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour $x \in \left]-R, R\right[$*

$$x^2 J_0''(x) + xJ'(x) + x^2 J(x) = b_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} (b_n a_n + a_{n-2})\, x^n.$$

On précisera l'expression de b_n en fonction des termes de la suite (a_n).

Dans les deux questions suivantes, on suppose que J_0 est solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.

Q 16 *Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{4^k\,(k!)^2} a_0$.*
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{2k} x^{2k}$.

La personne qui a écrit la suite de l'énoncé a oublié que a_1 était nul!

Q 17 *Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer de a_{2k+1} à l'aide de produits et de a_1*
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{2k+1} x^{2k+1}$.

Q 18 *Dans cette question, on s'intéresse aux solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\left]0, +\infty\right[$.*
Montrer que toute solution de $(\mathcal{E})$ sur $\left]0, +\infty\right[$ est développable en série entière.

Q 19 *Montrer que toute solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.*

Problème:

Notations
$\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficient réels.
$(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ désigne la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $H_j = \dfrac{1}{j!}\displaystyle\prod_{i=0}^{j-1}(X-i)$.

I - Utilisation de séries entières

I.A - Une première formule

Q 20 *Donner sans démonstration le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$.

Q 21 *En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} nx^n$.

Q 22 *Soit* $k \in \mathbb{N}$. *Déterminer le rayon de convergence des séries entières* $\sum_{n\geqslant 0} n^k x^n$ *et* $\sum_{n\geqslant k} \binom{n}{k} x^n$.

Q 23 *Soit* $k \in \mathbb{N}$. *On pose, pour* $x \in]-1,1[$, $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$. *Justifier que* g *est de classe* C^∞ *et déterminer* $g^{(k)}(x)$. *En déduire que,*

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

I.B - Utilisation d'une famille de polynômes

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note f_k la fonction définie sur $]-1,1[$ par $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$.

Q 24 *Soit* $k \in \mathbb{N}$. *Montrer que* $(H_0, \ldots, H_k)$ *est une base de* $\mathbb{R}_k[X]$ *et qu'il existe une unique famille* $(\alpha_{k,0}, \ldots, \alpha_{k,k})$ *dans* $\mathbb{R}^{k+1}$ *telle que* $X^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j$.

Q 25 *Pour* $k \in \mathbb{N}$, *donner les valeurs de* $\alpha_{k,0}$ *et* $\alpha_{k,k}$.

Q 26 *Pour tout couple* $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ *tel que* $1 \leqslant j \leqslant k$, *montrer que* $\alpha_{k,j} = j^k - \displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \alpha_{k,i}$.

Q 27 *Écrire une fonction Python* `alpha` *qui prend un couple d'entiers* (k,j) *en paramètre et qui renvoie la valeur de* $\alpha_{k,j}$.
ATTENTION: On supposera avoir accès à une fonction `binome` *telle que* `binome(n,k)` *renvoie le coefficient binomial* $\dbinom{n}{k}$.

Q 28 *Montrer que, pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *il existe un unique polynôme réel* P_k *tel que,*
pour tout $x \in]-1,1[$, $f_k(x) = \dfrac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ *et que ce polynôme vérifie la relation*

$$P_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} X^j (1-X)^{k-j}$$

I.C - Une relation sur les coefficients binômiaux

On s'intéresse dans cette sous-partie à la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\binom{2n}{n}x^n$ dont on note R le rayon de convergence.

Q 29 *Déterminer R.*

Q 30 *Montrer que, pour tout $x\in]-R,R[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.*

Q 31 *Montrer que, pour tout $x\in]-R,R[\setminus\{0\}$,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

Q 32 *En déduire que, pour tout $x\in]-R,R[\setminus\{0\}$,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\right)x^n=\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right)$$

Q 33 *Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,*

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$$

I..D-: Des propriétés des polynômes H_i

Q 34 *Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $P_{k+1}=X(1-X)P_k'+(k+1)XP_k$.*

Q 35 *Calculer explicitement P_2 et P_3.*

Q 36 *Déterminer, pour tout $k\in\mathbb{N}$, le degré de P_k ainsi que son coefficient dominant.*

Q 37 *Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\in]0,1[$, $x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right)=P_k(x)$.*

Q 38 *En déduire, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $j\in[[0,k]]$, un lien entre les coefficients de degré j et $k+1-j$ de P_k.*

Questions proches du cours:

R 1 *Voir cours*

R 2 *1: On a* $a_n x^{2n+3} = x^2 \times a_n \left(x^2\right)^n$.

Si $|x^2| < R$ *soit* $|x| < \sqrt{R}$ *alors* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \left(x^2\right)^n = f\left(x^2\right)$ *donc* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+3} = x^3 f\left(x^2\right)$.

2: Si $|x| < R$ *alors* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x)$ *et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (-x)^n = f(-x)$ *donc*

$f(x) + f(-x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \left(1 + (-1)^n\right) x^n$ *et* $1 + (-1)^n = \left\{ \begin{array}{c} 2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{array} \right.$ *donc*

$f(x) + f(-x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2a_{2p} x^{2p}$ *donc* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$.

R 3 *Si* $x \in]-1,1[$ *alors* $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} = x + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$ *donc si de plus,* $x \neq 0$,

$f(x) = \dfrac{\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}}{x^2} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^{n-2}}{n} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n+2}$.

La fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n+2}$ *est somme de série entière de rayon de rayon de convergence* 1 *donc est de classe* C^∞ *sur* $]-1,1[$. *C'est un prolongement de* f *de classe* C^∞.

I Exercice 1:

R 4 *On vérifie que* $\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} I_n & I_n \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} 2A & A \\ \hline A & 3A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 2A & A \\ \hline 0 & \frac{5}{2} A \end{array}\right)$.

R 5 *On en déduit que* $\det\left(\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} I_n & I_n \end{array}\right)\right) \times \det(M) = \det\left(\left(\begin{array}{c|c} 2A & A \\ \hline 0 & \frac{5}{2} A \end{array}\right)\right)$.

La formule du déterminant par blocs donne

$\det\left(\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} I_n & I_n \end{array}\right)\right) = \left(\det(I_n)\right)^2$ *et* $\det\left(\left(\begin{array}{c|c} 2A & A \\ \hline 0 & \frac{5}{2} A \end{array}\right)\right) = \det(2A) \times \det\left(\frac{5}{2} A\right) = 2^n \det(A) \times \left(\frac{5}{2}\right)^n \det(A)$

donc

$$\det(B) = 5^n \left(\det(A)\right)^2.$$

Exercice 2:

R 6 *Soit* φ *l'application linéaire canoniquement associée à* N *et* (e_1, e_2, e_3, e_4) *la base canonique de* $E = \mathbb{R}^4$.

On vérifie que $mat_{(e_1,e_3,e_2,e_4)}(f) = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & 2M \end{array}\right)$ *donc* N *est semblable à* N_1.

R 7 *On a* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *donc*

$$f(e_1 - e_2) = 0 et f(e_1 + 3e_2) = 4(e_1 + 3e_2).$$

R 8 *Posons* $u_1 = e_1 + 3e_2$ *et* $u_2 = e_1 - e_2$. *La famille* (u_1, u_2) *est libre donc base de* $\mathbb{R}^2$ *et* $mat_{(u_1,u_2)}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D$. *On a donc* $P_1^{-1} M P_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *avec* $P_1 = P_{(e_1,e_2)\to(u_1,u_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

R 9 *Posons* $Q = \left(\begin{array}{c|c} P_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & P_1^{-1} \end{array}\right)$. *Le produit par bloc donne* $P \times Q = \left(\begin{array}{c|c} P_1P_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & P_1P_1^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right) = I_4$ *donc* P *est inversible d'inverse* Q.

R 10 *On a* $P^{-1}N_1P = \left(\begin{array}{c|c} P_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & P_1^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & 2M \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} P_1 & 0 \\ \hline 0 & P_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} P_1^{-1}MP_1 & 0 \\ \hline 0 & 2P_1^{-1}MP_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 2D \end{array}\right)$
N *est semblable à* N_1 *qui est semblable à* $\left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 2D \end{array}\right)$ *donc* N *est semblable* $\left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 2D \end{array}\right)$ *qui est diagonale.*

Exercice 3:

Premier cas

R 11 *On a* $\varphi(f_1) : x \mapsto -\omega^2 \cos(\omega x) - a\omega \sin(\omega x) + b\cos(\omega x)$ *donc* $\varphi(f_1) = (b - \omega^2) f_1 - a\omega f_2 \in vect(f_1, f_2)$.
On a $\varphi(f_2) : x \mapsto -\sin(\omega x) + a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ *donc* $\varphi(f_2) = a\omega f_1 + (b - \omega^2) f_2 \in vect(f_1, f_2)$.
On en déduit que le plan vectoriel $F = vect(f_1, f_2)$ *est stable par* φ.

R 12 *La matrice de* φ_F *dans la base* (f_1, f_2) *est donc* $M = \begin{pmatrix} b - \omega^2 & a \\ -a & b - \omega^2 \end{pmatrix}$.
On a $\det(M) = (b - \omega^2)^2 + a^2 > 0$ *car* $a \neq 0$ *ou* $b \neq \omega^2$ *donc* φ_F *est un isomorphisme.*

R 13 *On cherche des solution de* $(\mathcal{E})$ *sous forme* $f = ef_1 + gf_2$ *donc appartenant à* F.
La fonction $f = ef_1 + gf_2$ *vérifie* $(\mathcal{E})$ *si et seulement si* $\varphi_F(f) = cf_1 + df_2$.
D'après la question précédente, φ_F *est un isomorphisme donc il existe un unique couple* $(e, g) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $\varphi_F(ef_1 + gf_2) = cf_1 + df_2$ *ce qui termine la démonstration..*

Deuxième cas

R 14 *On refait la même chose avec les fonctions* $f_1 : s \mapsto x\sin(\omega x)$ *et* $f_2 : x \mapsto x\cos(\omega x)$ *et* $\varphi : f \mapsto f'' + \omega^2 f$.

II Exercice 4:

R 15 *La fonction somme* J_0 *sera de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-R, R[$ *et on a* $\forall x \in]-R, R[$,
$J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $J_0'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, $J_0''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ *donc*

$$xJ_0'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n \text{ et } x^2 J_0''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n$$

$x^2 J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n-2}$ *donc* J_0 *est solution de* $(\mathcal{E})$ *sur* $]-R, R[$ *ssi* $\forall x \in]-R, R[$,

$$x^2 J_0''(x) + xJ'(x) + x^2 J(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n = 0,$$

soit $\forall x \in]-R, R[$,

$$x^2 J_0''(x) + xJ'(x) + x^2 J(x) = a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \big(n^2 a_n + a_{n-2}\big) x^n.$$

R 16 *Donc J_0 vérifie $(\mathcal{E})$ sur $]-R,R[$ si et seulement si*

$$\forall x\in]-R,R[,x^2J_0''(x)+xJ'(x)+x^2J(x)=a_1x+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(n^2a_n+a_{n-2}\right)x^n$$

.Par unicité des coefficients d'une série entière (l'égalité ayant lieu sur $]-R,R[$ pour $R>0$) on en déduit :
- Identification du coefficient de $x^1=x$: $a_1=0$,
-Identification du coefficient de x^n (pour $n\geq 2$) : $\forall n\geq 2$, $n^2a_n+a_{n-2}=0$.donc $\forall n\geq 2$, $\quad a_n=\frac{-a_{n-2}}{n^2}\quad (*)$
Vérifions par récurrence (pour $k\in\mathbb{N}$) H_k la propriété $a_{2k}=\dfrac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}a_0$.
Initialisation : *Pour $k=0$, on a $\dfrac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}a_0=\dfrac{1}{1.1^2}a_0=a_0$ donc la propriété H_0 est vraie.*
Hérédité : *Supposons la propriété vraie pour un certain entier $k\in\mathbb{N}$.*
On utilise alors la relation $(*)$ avec $n=2k+2=2(k+1)\geq 2$, ce qui donne
$a_{2(k+1)}=\frac{-a_{2k}}{(2(k+1))^2}=\frac{(-1).(-1)^k}{4(k+1)^2.4^k(k!)^2}=\frac{(-1)^{k+1}}{4^{k+1}.((k+1)!)^2}$, *ce qui achève la récurrence.*
Soit $x\in\mathbb{R}^*$. Je note $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_k=a_{2k+2}x^{2k}$ donc

$$\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|}=\frac{|x|^{2k+2}}{|x|^{2k}}\cdot\left|\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}\right|=|x^2|\cdot\frac{1}{(2k+2)^2}\to_{k\to+\infty}0<1,$$

donc la série $\sum a_{2k}x^{2k}$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc est de rayon $R_1=+\infty$.

Je laisse le corrigé pour que ceux qui, comme moi, ont oublié que $a_1=0$, puisse voir ce que j'attendais!

R 17 *On a $a_{2k+1}=\dfrac{(-1)}{(2k+1)^2}a_{2k-1}=\dfrac{(-1)}{(2k+1)^2}\times\dfrac{(-1)}{(2k-1)^2}a_{2k-3}=\dfrac{(-1)}{(2k+1)^2}\times\dfrac{(-1)}{(2k-1)^2}\times\cdots\times\dfrac{(-1)}{(3)^2}a_1$.*
On en déduit que $a_{2k+1}=\dfrac{(-1)^k\left((2k)(2k-2)\times\cdots\times 2\right)^2}{\left((2k+1)!\right)^2}a_1=\dfrac{(-1)^k2^{2k}(k!)^2}{\left((2k+1)!\right)^2}a_1$.
On montre de même que la série $\sum a_{2k+1}x^{2k+1}$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc est de rayon $R_2=+\infty$.

R 18 *Sur $]0,+\infty[$, posons $f_0=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}x^{2k}$ et $f_1(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k2^{2k}(k!)^2}{\left((2k+1)!\right)^2}x^{2k+1}$.*
D'après ce qui précède les fonctions f_0 et f_1 sont définies sur $]0,+\infty[$.
De plus il est immédiat qu'elles vérifient la relation $(*)$ donc sont des solutions de $(\mathcal{E})$
L'équation $(\mathcal{E})$ équivaut sur $]0,+\infty[$ à $y''+\dfrac{1}{x}y'+y=0$: $(\mathcal{E})$ donc l'ensemble de ses solution est un espace vectoriel de dimension 2.
Montrons que famille (f_0,f_1) est libre: supposons $\forall x\in]0,+\infty[$, $a_0f_0(x)+a_1f_1(x)$.
On peut passer à la limite en 0 car les sommes de séries entières sont continues sur l'intervalle ouvert de convergence et on obtient $a_0=0$.
De même, en passant à la limite en 0 dans la relation $a_0f_0'(x)+a_1f_1'(x)$ (es sommes de séries entières sont de classe C^1 sur l'intervalle ouvert de convergence), on obtient $a_1=0$
On en déduit que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]0,+\infty[$ est vect (f_0,f_1).

R 19 *Une solution f sur $\mathbb{R}$ est solution sur $]0,+\infty[$ donc sa restriction à $]0,+\infty[$ est de la forme*
$x\mapsto a_0\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}x^{2k}+a_1\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k2^{2k}(k!)^2}{\left((2k+1)!\right)^2}x^{2k+1}$ *avec $(a_0,a_1)\in\mathbb{R}^2$ quelconque.*
De même sa restriction à $]-\infty,+0[$ est de la forme $x\mapsto c_0\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}x^{2k}+c_1\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k2^{2k}(k!)^2}{\left((2k+1)!\right)^2}x^{2k+1}$, $(c_0,c_1)\in\mathbb{R}^2$.
De plus, elle est continue en 0:

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(a_0\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}x^{2k}+a_1\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\,2^{2k}\,(k!)^2}{((2k+1)!)^2}x^{2k+1}\right)=a_0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}\left(c_0\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}x^{2k}+c_1\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\,2^{2k}\,(k!)^2}{((2k+1)!)^2}x^{2k+1}\right)=c_0\end{array}\right. \quad \textit{donc } a_0=c_0.$$

Elle est de classe C^1 *donc* $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)$ *donc* $a_1=c_1$.

On a donc $f(x)=a_0\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}x^{2k}+a_1\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\,2^{2k}\,(k!)^2}{((2k+1)!)^2}x^{2k+1}$ *pour* $x\in\mathbb{R}^*$ *donc pour* $x\in\mathbb{R}$ *donc* f *est développable en série entière sur* $\mathbb{R}$.
Réciproquement une telle fontion est solution (déjà vu).

Problème:

I Utilisation de séries entières

I.A-: Une première formule

R 20 *La série entière* $\sum_{n\geqslant 0}x^n$ *a pour rayon de convergence* 1 *et* $\forall x\in\left]-1,1\right[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}=g(x)$.

R 21 *Pour toute suite* $(a_n)_{n\in N}$, *les séries entières* $\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0}na_nx^n$ *ont même rayon de convergence donc a série entière* $\sum_{n\geqslant 0}nx^n$ *a pour rayon de convergence* 1.
De plus par propriété de dérivation des séries entières sur l'intervalle ouvert de convergence, g *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-1,1[$ *et, pour tout* $x\in\,]-1,1[$ *:*

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

On en déduit que $\forall x\in\left]-1,1\right[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty}nx^n\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^n=\dfrac{x}{(1-x)^2}$.

R 22 *la série entière* $\sum_{n\geqslant 0}n^kx^n$, *qui vaut 1 par* k *applications successives de la propriété rappelée ci-dessus*
Soit $k\in N$ *fixé. Pour tout* $n\geqslant k$ *on a* $\binom{n}{k}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ *et donc* $\binom{n}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{n^k}{k!}$.
Donc la série entière $\sum_{n\geqslant k}\binom{n}{k}x^n$ *a le même rayon de convergence que la série entière* $\dfrac{1}{k!}\sum_{n\geqslant 0}n^kx^n$, *qui vaut 1*

R 23 *La fonction* g *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *comme inverse d'une fonction* $\mathcal{C}^\infty$.
On a $g(x)=(1-x)^{-1}$ *donc* $g'(x)=(-1)\times(-1)\times(1-x)^{-2}=1\times(1-x)^{-2}$ *et donc*
$g''(x)=(-2)\times(-1)\times 1\times(1-x)^{-3}=2\times 1\times(1-x)^{-3}$.
De même, la dérivée de $(1-x)^{-i}$ *est* $i\,(1-x)^{-(i+1)}$ *donc, par récurrence immédiate,*
$g^{(k)}(x)=k\times(k-1)\times\cdots\times 2\times 1\times(1-x)^{-(k+1)}=\dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.
Par ailleurs en dérivant terme à terme k *fois la série entière on obtient pour* $x\in\,]-1,1[$ *:*

$$g^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{+\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}=k!\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n &= x^k\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-kn}\\ &= \frac{x^k}{k!}g^{(k)}(x)\\ &= \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}\end{aligned}$$

I.B-: Utilisation d'une famille de polynômes

R 24 *Pour tout $j \in N$, le polynôme H_j est de degré j. On en déduit que la famille $(H_0,\dots,H_k)$ est une famille échelonnée en degrés, donc libre, de $k+1$ polynômes appartenant à $\mathbb{R}_k[X]$ qui est de dimension $k+1$. Cette famille constitue donc une base de $\mathbb{R}_k[X]$. Le polynôme $X^k \in \mathbb{R}_k[X]$ s'écrit donc de manière unique comme combinaison linéaire de cette famille,*

il existe une unique famille $(\alpha_{k,0},\dots,\alpha_{k,k})$ dans $\mathbb{R}^{k+1}$ telle que $X^k = \sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j : (*)$.

R 25 *Pour $k=0$, on a directement $\alpha_{0,0}=1$.*
Soit $k \geqslant 1$, alors en évaluant la relation $(*)$ en 0 on obtient, compte tenu de $H_k(0)=0$ pour tout $k\geqslant 1$, que $\alpha_{k,0}=0$.
En identifiant les coefficients des termes de degré k dans $(*)$, absents dans H_j si $j<k$, on obtient $\alpha_{k,k}=k!$

R 26 *Soient deux entiers j et k tels que $1\leqslant j\leqslant k$.*
En évaluant la relation $(*)$ en j, on obtient $j^k=\sum_{i=0}^{k}\alpha_{k,i}H_i(j)$. Si $j<i$ alors $X-j$ est un facteur de H_i et donc $H_i(j)=0$. En revanche si $j\geqslant i$ on obtient

$$H_i(j)=\frac{1}{i!}\prod_{\ell=0}^{i-1}(j-\ell)=\frac{j(j-1)\dots(j-i+1)}{i!}=\binom{j}{i}$$

On obtient finalement $j^k=\sum_{i=0}^{j}\alpha_{k,i}\binom{j}{i}$ et en isolant le terme $i=j$, $\alpha_{k,j}=j^k-\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}\alpha_{k,i}$.

R 27 *programme python:*
(ce programme n'est pas demandé)

```
def binome(n,k):
    b=1
    for i in range(k):
       b=b*(n-i)/(i+1)
    return b

def alpha(k,j):
   if k==0:
     return 1
   else:
     A=[0]
     for l in range(j):
        A.append((l+1)**k-sum([binome(l+1,i)*A[i] for i in range(l+1)]))
     return A[j]
end
```

R 28 *Soit k un entier naturel. Soit x un réel de $]-1,1[$.*
Par définition, $f_k(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$.
Or d'après la question 24, $n^k=\sum\limits_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j(n)$. Donc $f_k(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j(n)x^n$.
Par linéarité de la somme de séries convergentes, $f_k(x)=\sum\limits_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}H_j(n)x^n$.
Or par définition $H_j(n)=\begin{cases}\binom{n}{j} & \text{si } n\geqslant j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. Mais par convention $\binom{n}{j}=0$ si $j<n$. Donc $H_j(n)=\binom{n}{j}$.
Ainsi $f_k(x)=\sum\limits_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}\sum\limits_{n=j}^{+\infty}\binom{n}{j}x^n$.
D'après la question 22, $\sum\limits_{n=j}^{+\infty}\binom{n}{j}x^n=\frac{x^j}{(1-x)^{j+1}}$.
Ainsi $f_k(x)=\sum\limits_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}\frac{x^j}{(1-x)^{j+1}}=\frac{\sum\limits_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}x^j(1-x)^{k-j}}{(1-x)^{k+1}}=\dfrac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ avec $P_k(X)=\sum\limits_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}X^j(1-X)^{k-j}$.
S'oit Q_k un polynôme vérifiant $f_k(x)=\dfrac{Q_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$, alors on aurait $Q_k(x)=P_k(x)$ pour $x\in\,]-1,1[$ donc Q_k-P_k admet une infinité de racines donc $Q_k=P_k$.

I.C-: Une relation sur les coefficients binômiaux

R 29 *Pour $x\neq 0$ fixé et $n\in N$, posons $u_n=\binom{2n}{n}|x^n|>0$. On a alors*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+2)!\,(n!)^2}{((n+1)!)^2\,(2n)!}|x|=\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|x|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}4|x|$$

On déduit alors du critère de d'Alembert que si $|x|<\dfrac{1}{4}$ alors la série de terme général u_n converge, et que si $|x|>\dfrac{1}{4}$ alors cette même série diverge. On en déduit que $R=\dfrac{1}{4}$.

R 30 *Par développement en série entière de référence on a, pour tout x tel que $|4x|<1$,*

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}}=(1-4x)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(-4x)^n$$

où, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n=\dfrac{1}{n!}\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(-\dfrac{1}{2}-k\right)=\dfrac{(-1)^n}{n!\,2^n}\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)=\dfrac{(-1)^n}{n!\,2^n}\,\dfrac{(2n)!}{2^n\,n!}=\dfrac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$.

R 31 *La fonction $x\mapsto\sqrt{1-4x}$ est dérivable sur I, de dérivée $x\mapsto\dfrac{-2}{\sqrt{1-4x}}$.*
On en déduit qu'une primitive sur I de $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ est donnée par $x\mapsto-\dfrac{\sqrt{1-4x}}{2}$, et que la primitive qui s'annule en 0 est $x\mapsto\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$.
Par intégration terme à teme de la série entière sur $]-R,R[\,=\left]-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right[$, on en déduit que, pour tout $x\in I$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$ et après division par x, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\dfrac{x^n}{n+1}=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

R 32 *Les séries des deux questions précédentes ayant pour rayon de convergence* $\frac{1}{4}$*, la série entière obtenue par produit de Cauchy a un rayon de convergence au moins égal à* $\frac{1}{4}$ *et, pour tout* $x \in I \setminus \{0\}$*,*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\right)x^n &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n\right)\\ &= \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\,\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\\ &= \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right).\end{aligned}$$

R 33 *Or, toujours d'après le développement en série entière obtenu précédemment, pour* $x \in I \setminus \{0\}$ *on a*

$$\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}-1\right) = \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^{n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n+2}{n+1}x^n$$

Par unicité du développement en série entière, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}$.

I.D-: Des propriétés des polynômes H_i

R 34 *Soit* k *un entier naturel.*
Par définition, $\forall x \in]-1,1[, : f_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$.
En tant que série entière, f_k *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et* $\forall x \in]-1,1[, : f_k'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{k+1}x^{n-1}$.
Donc $\forall x \in]-1,1[,\ f_{k+1}(x) = x f_k'(x)$.
Or $\forall x \in]-1,1[, f_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$. *Donc* $\forall x \in]-1,1[, f_k'(x) = \frac{(1-x)P_k'(x)+(k+1)P_k(x)}{(1-x)^{k+2}}$.
Alors $\forall x \in]-1,1[, f_{k+1}(x) = \frac{x(1-x)P_k'(x)+(k+1)xP_k(x)}{(1-x)^{k+2}}$.
Par unicité du polynôme P_{k+1}, $P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$.

R 35 $P_0 = 1,\ P_1 = X$.

$$\begin{aligned}\text{Donc } P_2(X) &= X(1-X)+2X^2\\ &= X^2+X\\ P_3(X) &= X(1-X)(2X+1)+3X(X^2+X)\\ &= 2X^2+X-2X^3-X^2+3X^3+3X^2\\ &= X^3+4X^2+X\end{aligned}$$

R 36 *Montrons par récurrence sur* k*:* P_k *est un polynôme de degré* k *et de coefficient dominant noté* $c_k = 1$.
Init: P_0, P_1, P_2 *et* P_3 *sont des polynôme de degré respectifs* 0, 1, 2 *et* 3 *de coefficient dominant* 1.
Hérédité: Soit k *un entier naturel. Supposons* P_k *polynôme de degré* k *de coefficient dominant* $c_k = 1$.
D'après la question 34 $P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$.
Donc P_{k+1} *est un polynôme de degré inférieur ou égal à* $k+1$.
Le coefficient de X^{k+1} *et* $-kc_k + (k+1)c_k = c_k = 1$
Donc P_{k+1} *est un polynôme de degré* $k+1$ *et de coefficient dominant à* 1.

R 37 *Procédons à nouveau par récurrence sur* k.
Initialisation: $x^2P_1\left(\frac{1}{x}\right) = x = P_1(x)$ *et* $x^3P_2\left(\frac{1}{x}\right) = x^3\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right) = x + x^2 = P_2(x)$.
Hérédité: Soit k *un entier naturel non nul. Supposons que pour tout* $x \in]0,1[$, $x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) = P_k(x)$.

D'après la question 34 $P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$.
Donc $\forall x \in]0,1[$, $x^{k+2}P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) = x^{k+2}\left(\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)P_k'\left(\frac{1}{x}\right) + (k+1)\frac{1}{x}P_k\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x^k\left((x-1)P_k'\left(\frac{1}{x}\right) + (k+1)xP_k\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.
Par hypothèse de récurrence, $\forall x \in]0,1[$, $x^{k+1}P_k\left(\dfrac{1}{x}\right) = P_k(x)$.
Donc en dérivant, $\forall x \in]0,1[$, $(k+1)x^kP_k\left(\dfrac{1}{x}\right) - x^{k-1}P_k'\left(\frac{1}{x}\right) = P_k'(x)$.

$$\begin{aligned}
\textit{Alors } P_{k+1}(x) &= x(1-x)P_k'(x) + (k+1)xP_k(x) \\
&= x(1-x)\left((k+1)x^kP_k\left(\frac{1}{x}\right) - x^{k-1}P_k'\left(\frac{1}{x}\right)\right) + (k+1)xP_k(x) \\
&= (k+1)x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) - x^k(1-x)P_k'\left(\frac{1}{x}\right) - (k+1)x^{k+2}P_k\left(\frac{1}{x}\right) + (k+1)xP_k(x) \\
&= x^k\left((x-1)P_k'\left(\frac{1}{x}\right) + (k+1)xP_k\left(\frac{1}{x}\right)\right) + (k+1)x\left(-x^{k+1}P_k\left(\frac{1}{x}\right) + P_k(x)\right) \\
&= x^{k+2}P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

R 38 *Soit* k *un entier naturel non nul.*
Il existe des réels $c_0, c_1, \cdots, c_k$ *tel que* $P_k(x) = \sum\limits_{i=0}^{k} c_i x^i$.
D'après la question 36, $c_k = 1$ *et de même par récurrence, on montrerait que* $c_0 = 0$. *Donc* $c_0 = c_{k+1} = 0$.

$$\begin{aligned}
\textit{Alors } x^{k+1}P\left(\frac{1}{x}\right) &= x^{k+1}\sum_{i=1}^{k} c_i\frac{1}{x^i} \\
&= \sum_{i=1}^{k} c_i x^{k+1-i} \\
&= \sum_{i=1}^{k} c_{k+1-i}x^i
\end{aligned}$$

Donc par unicité des coefficients $\forall i \in [[0, k+1]]$, $c_i = \sum\limits_{i=1}^{k} c_{k+1-i}$.

Commentaires:

Utilisation des notations

- ne pas confondre f et $f(x)$ (Q11 $\varphi(f)(x)$ bonne notation différrent de $\varphi(f(x))$ ou $\varphi(f)$.

Règle de d'Alembert:

- ne pas oublier la limite
- ne pas appliquer de "réciproque" (plusieurs questions concernées. Mentionner les deux cas: $|x| > R$ et $|x| < R$.

Préciser rapidement les théorèmes invoqués: exemples

- Par th de dérivation terme à terme
- Par application du produit par blocs
- $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont même rayon

récurrences immédiates: laisser la forme développée avec ... et simplifier ensuite (Préférer $2 \times 3 \times 4$ à 24)
Essayer d'être précis:

- Préférer $\forall i \deg(H_i) = i$ à "degré échelonné"
- Préférer $X^k = \alpha_{k,k} H_k + Q$ avec $\deg(Q) \leq k-1$ à "il n'y a de X^k que dans H_k"

Algèbre

- ne pas parler de la dimension d'une famille mais de son nombre d'éléments
- attention à la définition de P dans la formule de changement de base
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Utilisation d'un marteau pour écraser une mouche:

- $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ dse donc C^∞ sur $]-1,1[$.

Domaine de validité des calculs à préciser: exemple parmi d'autres

- $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est dse sur $]-1,1[$ donc si $|'4x| < 1$, alors $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}} = ...$

Q1: Dériver et intégrer une série entière ne change pas le rayon
Q2.A CONNAÎTRE (programme de colle S5 et 6). D'Alembert inutile
Q8 inutile de redémontrer la formule de changemende base. Confusion P avec P^{-1}.
Q9: Par application du produit par blocs on vérifie que $\left(\begin{array}{c|c} P_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & P_1^{-1} \end{array}\right)$ est l'inverse de ...
Q10: Ne pas oublier de revenir à N (deux étapes)
Q13: Rédaction: Faire apparaître ce qui est donné (mb de droite) et ce qu'on cherche.
$\forall f, \varphi(f)$ existe est est unique est sans intéret et ne caractérise pas les bijections.
Q14: $Non\,(P\ ou\ Q)$ équivaut à $Non\,(P)$ et $Non\,(Q)$
E4: pb énoncé: $a_1 = 0$.
Q23 mettre sous forme $(1-x)^{-1}$, $(1-x)^{-2}$ $\ldots$, $(1-x)^{-k}$ pour que les calculs apparaissent immédiats.
Q27: récusivité maladroite (long à l'exécution)