Semaines 5 et 6

I Contenu

- Eléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice, polynôme caractéristique, multiplicité d'une valeur propre. Endomorphismes et matrices diagonalisables. Méthode de résolution d'un problème matriciel par changement de base, convergence dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par passage aux composantes. **Attention: les critères de diagonalisabilité utilisant les polynômes annulateurs ne sont pas à ce programme de colle.**

Attention 1 *Ne pas poser les questions de cours 32, 36, 42 et 43 le lundi 6 novembre*

II Questions de cours

1. (voir corrigé DS2) Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. On pose, pour $x \in \left]-R, R\right[$ $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   a: Pour quelles valeurs du réel x est-on assuré de la convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n+3}$?
   Donner une expression de la somme de cette série à l'aide de f.
   b: Pour quelles valeurs du réel x est-on assuré de la convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_{2n} x^{2n}$?
   Donner une expression de la somme de cette série à l'aide de f.
2. Les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer (sans passer par le polynôme caractéristique) que M est semblable à une matrice diagonale.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A quelle condition le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il vecteur propre de M? Quelle est la valeur propre associée?
5. λ est valeur propre de f si est seulement si $\ker(f - \lambda Id) \neq \{0_E\}$. λ est valeur propre de f si est seulement si λ est racine du polynôme caractéristique de f.
6. Si $x \mapsto a_{i,j}(x)$ est une fonction affine, alors $\det\left((a_{i,j}(x))_n\right)$ est un polynôme de degré au plus n.
7. Polynôme caractèristique: définition, degré, coefficient dominant (démonstration à l'aide de la question précédente), coefficient constant.
   Valeur du coefficient de x^{n-1} (démonstration non demandée).
8. λ valeur propre de f si et seulement si λ est racine du polynôme caractéristique de f.
9. Etudier les éléments propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. (distinguer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
10. Soit A une matrice diagonalisable. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k est diagonalisable.
11. Les sous-espaces propres de f sont en sommes directe. Si $n = \dim(E)$ alors f admet au plus n valeurs propres.
12. A quelle condition le vecteur de $\mathbb{K}^n$ dont les composantes valent toutes 1 est-il vecteur propre d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
13. A quelle condition 0 est-il valeur propre de M? Dans ce cas, exprimer $\dim(E_0(M))$ à l'aide du rang de M.
14. Définition d'un endomorphisme diagonalisable. (cinq formulations équivalentes).
15. Si f admet $n = \dim(E)$ valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable. Que peut-on dire des sous-espaces propres?

16. Si f est nilpotente, alors $sp(f) = \{0\}$.

17. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable? (distinguer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

18. Définition de la multiplicité des racines d'un polynôme et caractérisation par les dérivées successives (énoncé). Définition d'un polynôme scindé et caractérisation par les racines.

19. Montrer que $(X-1)^2$ divise $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.

20. Définiton de la multiplicité d'une valeur propre. Si $m(\lambda)$ est la multiplicité de la valeur propre λ de A alors $\sum_{\lambda \in sp(A)} m(\lambda) \leq n$.

21. Donner un exemple de matrice de taille n pour laquelle $m(0) = n$ et $\dim(E_0(M)) = 1$.

22. $m(\lambda) = 1 \Rightarrow \dim(E_\lambda(M)) = 1$.

23. Si $m(\lambda)$ est la multiplicité de la valeur propre λ de f alors $\dim(E_\lambda(f)) \leq m(\lambda)$.

24. Somme et produit des valeurs propres:.énoncé. ATTENTION à l'hypothèse sur χ_f.

25. La matrice M est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique de M est scindé et pour toute valeur propre λ de M on a l'égalité $\dim(E_\lambda(M)) = m(\lambda)$.

26. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension impair admet au moins une valeur propre.

27. Pour des matrices de taille adaptées, si (A_n) converge vers A et (B_n) converge vers B alors (A_nB_n) converge vers AB (continuité du produit matriciel) (on pourra se limiter à des matrices 2-2 pour la démonstration).

28. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A.

29. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On admet que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. On pose $M_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$. Montrer que la suite (M_n) converge et déterminer sa limite.

30. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. M est semblable à $\lambda I_n \Leftrightarrow M = \lambda I_n$. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable?

31. La matrice $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable?

32. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Montrer que les sous-espaces propres de la matrice M sont de dimension 1.

33. Déterminer le polynome caractéristique de la matrice M de la question précédente.