DM3 (pour le 18 octobre 2024)

Problème:

Le problème est composé de trois parties qui ne sont pas indépendantes. On pourra admettre les résultats des questions de ce problème en les précisant dans la copie.
Etant donné un réel μ, on considère l'équation différentielle (E_μ) suivante :

$$16\left(x^2-x\right)y''+(16x-8)y'-\mu y=0 \quad (E_\mu)$$

dont on cherche des fonctions solutions y sur l'intervalle ouvert $]0,1[$.

I Partie I - Résolution dans le cas où $\mu=0$

Dans cette partie, on suppose $\mu=0$, on cherche donc à résoudre sur $]0,1[$ l'équation

$$16\left(x^2-x\right)y''+(16x-8)y'=0. \quad (E_0)$$

Q 1 *Soit $f : x \mapsto \arcsin(2x-1)$. Montrer que f est définie et continue sur le segment $[0,1]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]0,1[$ et que : $\forall x \in]0,1[, \quad f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.*

Q 2 *Montrer que toute fonction constante sur $]0,1[$ est solution de (E_0).*

Q 3 *Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}, \frac{16x-8}{16(x^2-x)}=\frac{1/2}{x}+\frac{1/2}{x-1}$.*

Q 4 *On pose $z=y'$. Montrer que (E_0) est équivalente à : $z'+\left(\frac{1/2}{x}+\frac{1/2}{x-1}\right)z=0. \quad (E^\star)$*

Q 5 *Résoudre $(E^\star)$ sur $]0,1[$.*

Q 6 *En déduire les solutions de (E_0) sur $]0,1[$.*

II Partie II - Recherche d'une solution particulière dans le cas $\mu \neq 0$

On suppose $\mu \neq 0$.

Soit y une fonction égale à la somme d'une série entière de terme général $a_n x^n$, de rayon de convergence R supposé strictement positif :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Q 7 *Montrer que y vérifie (E_μ) si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(16n^2-\mu\right)a_n-8(n+1)(2n+1)a_{n+1}\right]x^n=0$.*

On supposera dorénavant que y est solution de (E_μ).

Q 8 *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad a_n=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(16k^2-\mu\right)}{4^n(2n)!}a_0 : (\mathcal{R}_n)$.*

Q 9 *Si $a_0=0$, donner une expression simple de y et préciser son rayon de convergence.*

Q 10 *Si $a_0 \neq 0$ et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mu=16p^2$. Montrer que y est polynomiale et préciser son degré.*

Q 11 *Si $a_0 \neq 0$ et il n'existe pas d'entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mu=16p^2$. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.*

On ne suppose plus y est solution de (E_μ).

Q 12 *Conclure.*

Q 13 *Existe-t-il des solutions de (E_μ) non développables en série entière?*

III Partie III - Etude aux bornes de $]-R, R[$ d'une solution particulière

On se place dans le cas où $a_0 = 1$ et $\mu = 1$.

Soit ϕ la fonction définie sur l'intervalle $]-R, R[$ par la relation :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par les relations $(\mathcal{R}_n)$ et R est le rayon de convergence obtenu à la question précédente.

Q 14 *Montrer que que* $\forall n \in \mathbb{N}^\star, a_n = \frac{-(4n)!}{4^{2n}\times((2n)!)^2\times(4n-1)}$.

Q 15 *En déduire que* $a_n \sim_{n\to\infty} \frac{-1}{4\sqrt{2\pi}n^{3/2}}$.

Q 16 *Etudier la convergence de la série* $\sum a_n x^n$ *en* $x = R$ *et* $x = -R$.

Exercice (facultatif):

Cet exercice est une illustration de la méthode de la base adaptée.

On définit la famille de polynômes réels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$ et par les relations suivantes :

$$\forall n \geq 1, \quad P_n(X) = X(X-1)\dots(X-(n-1)) = \prod_{k=0}^{n-1}(X-k).$$

Q 17 *Etablir que* $(P_0, P_1, \dots, P_d)$ *est une base de* $\mathbb{R}_d[X]$.

Q 18 *Soit* P *un polynôme à coefficients réels de degré* d.

1. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière* $\sum P(n)\dfrac{x^n}{n!}$.
2. *Montrer qu'il existe un polynôme* Q *de degré* d *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{P(n)}{n!} x^n = Q(x)e^x$.

Correction

Problème:

Partie I - Résolution dans le cas où $\mu = 0$

R 1 *Si $0 \leq x \leq 1$ alors $2x - 1 \in [-1, 1]$ et $x \mapsto \arcsin(x)$ est définie et continue sur $[-1; 1]$ donc f est continue sur $[0, 1]$.*
Si $0 < x < 1$ alors $2x - 1 \in]-1, 1[$ et $x \mapsto \arcsin(x)$ est dérivable sur $]-1, 1[$ donc f est dérivable sur $]-1, 1[$.
De plus $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.

R 2 *Vérification immédiate.*

R 3 *Réduisons au même dénominateur :*

$$\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1} = \frac{x - 1/2}{x(x-1)} = \frac{16x-8}{16x(x-1)} = \frac{16x-8}{16\left(x^2-x\right)}$$

R 4 *Sur l'intervalle $]0, 1[$ $(E_0) \Leftrightarrow y'' + \frac{16x-8}{16(x^2-x)} y' = 0 \Leftrightarrow z' + \frac{16x-8}{16(x^2-x)} z = 0$ avec $z = y'$*
En utilisant la question précédente, on obtient la forme attendue :

$$(E^\star) : z' + \left(\frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1}\right) z = 0 \quad \text{et} \quad z = y'$$

R 5 *Posons $a(x) = \frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{x-1}$, une primitive sur]0, 1[est $A(x) = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln(1-x)$.*
Les solutions de $(E^\star)$ sur $]0, 1[$ sont: $\varphi_A : x \mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)} = Ax^{-1/2}(1-x)^{-1/2} = \frac{A}{\sqrt{x(1-x)}}$ pour $A \in \mathbb{R}$.

R 6 *les solutions de (E_0) sur $]0, 1[$ sont les fonction y telles que $z = y'$ est solutions de $(E^\star)$ sur $]0, 1[$ telles qu'il existe $A \in \mathbb{R}$, $\quad y'(x) = \frac{A}{\sqrt{x(1-x)}} = Af'(x)$.*
On en déduit que les solutions de (E_0) sur $]0, 1[$ sont les fonctions :

$$f_{A,B} : x \mapsto Af(x) + B = A\arcsin(2x-1) + B \text{ où } A, B \in \mathbb{R}.$$

Partie II - Recherche d'une solution particulière dans le cas $\mu = 0$

R 7 *Soit une fonction $y : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, somme d'une série entière de rayon $R > 0$.*
Le th de dérivation terme à terme des séries entères donne: $y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$
donc $16\left(x^2 - x\right) y'' + (16x - 8)y' - \mu y = 0$

$\Leftrightarrow 16 \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 16 \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 16 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n x^n - 8 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} - \mu \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

$\Leftrightarrow 16 \sum\limits_{n=2(ou\ 0)}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 16 \sum\limits_{n=1(ou\ 0)}^{+\infty} (n+1)\, na_{n+1} x^n + 16 \sum\limits_{n=1(ou\ 0)}^{+\infty} na_n x^n - 8 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n - \mu \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(16n(n-1)a_n - 16\,(n+1)\, na_{n+1} + 16na_n - 8\,(n+1)\, a_{n+1} - \mu a_n\right) x^n = 0$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left[\left(16n^2 - \mu\right) a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1}\right] x^n = 0 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 0x^n.$

R 8 *Par unicité du DSE,*
La fonction y est donc solution de (E_μ), ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $(16n^2 - \mu)\, a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1} = 0$.soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{(16n^2 - \mu)}{8(n+1)(2n+1)} a_n = \frac{(16n^2 - \mu)}{4(2n+2)(2n+1)} a_n$$

On en déduit

$$a_{n+1} = a_0 \prod_{k=0}^{n} \frac{(16k^2 - \mu)}{4(2k+2)(2k+1)} = a_0 \frac{\prod_{k=0}^{n}(16k^2 - \mu)}{\prod_{k=0}^{n} 4(2k+2)(2k+1)} = a_0 \frac{\prod_{k=0}^{n}(16k^2 - \mu)}{4^{n+1}(2n+2)!}$$

Ou encore, par simple décalage d'indice :

$$\textit{pour tout } n \in \mathbb{N}^\star, \quad a_n = a_0 \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2 - \mu)}{4^n (2n)!} \qquad (^*)$$

R 9 *Si $a_0 = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = 0$. La fonction y est la fonction nulle, somme de la série entière nulle de rayon de convergence $+\infty$.*

R 10 *Si $a_0 \neq 0$ et $\mu = 16p^2$ pour un entier p, on a $a_n = a_0 \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(16k^2-\mu)}{4^n(2n)!}$ pour tout $n \in [[1, p-1]]$. Au rang $n = p+1$, la formule $(^*)$ donne $a_p = 0$ d'abord, et ensuite: $\forall n \geq p+1, a_n = 0$. Dans ce cas, toute solution développable en série entière est un polynôme de degré p. (On note dans ce cas $I = \mathbb{R}$).*

R 11 *Si $a_0 \neq 0$ et μ n'est pas de la forme $\mu = 16p^2$, alors $a_n = a_0 \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1}(16k^2-\mu)}{4^n(2n)!}$ pour tout n. Posons $u_n = a_n x^n$.*
On a $a_{n+1} = \frac{(16n^2-\mu)}{4(2n+2)(2n+1)} a_n$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(16n^2-\mu)}{8(n+1)(2n+1)} x$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|$, et donc en utilisant le théorème de D'Alembert :
- Si $|x| < 1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument,
- Si $|x| > 1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement.
On en déduit : $R = 1$ (On note dans ce cas $I =]-1, 1[$).

R 12 *Comme on a raisonné par équivalence dans la question 7, les fonctions obtenues sont bien solution de (E_μ) (sur l'intervalle I obtenus précédemment)*

R 13 *Soit $y_0 : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la fonction obtenue pour $a_0 = 1$. Les autres fonctions développables en série entière solutions de (E_μ) sont de la forme $y = a_0 y_0$ est solution de (E_μ) L'ensemble des solutions de (E_μ) sur I est un espace vectoriel de dimension 2 donc il existe des solutions non développables en série entière.*

Partie III - Etude aux bornes de $]-R, R[$ d'une solution particulière

R 14 *on a $a_0 = 1, \mu = 1$, et donc:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{(16n^2 - 1)}{4(2n+2)(2n+1)} a_n \,(^*) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2 - 1)}{4^n(2n)!}$$

on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2 - 1)}{4^n(2n)!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1)}{4^n(2n)!} \qquad ((^{**})$$

Notons P_n le produit des entiers pairs, I_n le produit des entiers impairs, compris entre 1 et $4n$, de façon que

$(4n)! = P_n I_n$. *Pour le produit des pairs, on a* $P_n = 2 \times \ldots \times (4n) = 2^{2n} \times 1 \times \ldots \times (2n) = 2^{2n}(2n)!$
Considérons ensuite le produit :

$$Q_n = (4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1) = -1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-5) \cdot (4n-3) \times (4n-1) = -I_n$$

On a donc :

$$(4n)! = P_n I_n = 2^{2n}(2n)! \cdot (-Q_n) = -2^{2n}(2n)!(4n-1) \times \prod_{k=0}^{n-1} (4k-1)(4k+1)$$

On en déduit que

$$a_n = \frac{-(4n)!}{2^{2n}(2n)!(4n-1)} \frac{1}{4^n (2n)!} = \frac{-(4n)!}{4^{2n}(2n)!2(4n-1)}$$

R 15 *la formule de Stirling donne:* $(4n)! \sim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-4n}(4n)^{4n}\sqrt{2\pi 4n} = \mathrm{e}^{-4n}4^{4n}n^{4n}2\sqrt{2\pi n}$ *et* $(2n)! \sim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}$, $(2n)!^2 \sim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-4n}(2n)^{4n}2\pi 2n = \mathrm{e}^{-4n}4^{2n}n^{4n}2\pi 2n$ *(on a bien* $2^{4n} = 4^{2n}$ *) donc :*

$$a_n = \frac{-(4n)!}{4^{2n}(2n)!^2(4n-1)} \sim_{n\to\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-4n}4^{4n}n^{4n}2\sqrt{2\pi n}}{4^{2n}\mathrm{e}^{-4n}4^{2n}n^{4n}2\pi 2n4n} = \frac{-\sqrt{n}}{4\sqrt{2\pi}n^2} = \frac{-1}{4\sqrt{2\pi}n^{3/2}}$$

R 16 *On a* $R = 1$. *Etudions la convergence des séries numériques* $\sum a_n 1^n = \sum a_n$ *et* $\sum a_n(-1)^n$ *:*
On a $|a_n| \sim_{n\to\infty} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}n^{3/2}}$ *et la série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ *converge. Nos deux séries numériques convergent donc absolument.*

Exercice:

R 17 *On a* $\deg(P_i) = i$ *donc* $(P_0, P_1, \ldots, P_d)$ *est libre et est formée de* $d+1 = \dim(\mathbb{R}_d[X])$ *vecteurs donc est une base de* $\mathbb{R}_d[X]$.

R 18 *Soit* P *un polynôme à coefficients réels de degré* d, $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$.

1. *On a* $P(n) \sim_{n\to\infty} a_d n^d$. *Le rayon de convergence de* $\sum n^d x^n$ *est égal à* 1 *d'après le cours donc Le rayon de convergence de* $\sum P(n) x^n$ *est égal à* 1

2. *La famille* $(P_0, P_1, \ldots, P_d)$ *est une base de* $\mathbb{R}_d[X]$ *donc il existe des réels* $b_0, \ldots, b_d$ *tels que* $P = \sum_{i=0}^{d} b_i P_i$.

   On en déduit que si $x \in \mathbb{R}$ *alors* $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{d} b_i P_i(n) \right) \frac{x^n}{n!}$ *Or, pour* $i \not\geq 1$, $\frac{P_i(n)}{n!} = \begin{cases} 0 \ \mathrm{s} \\ \frac{n(n-1)\times\cdots}{n!} \end{cases}$

   donc $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=0}^{d} \left(\sum_{n=i}^{\infty} b_i \frac{x^n}{(n-i)!} \right)$ *car d'après la question précédente, toutes les séries convergent.*

   On en déduit que $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=0}^{d} b_i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+i}}{n!} = \left(\sum_{i=0}^{d} b_i x^i \right) \times e^x$.