DM 6, pour le 4/11/2024

Exercice 1:

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

Diagonalisation de A

Q 1 *Donner un vecteur propre et une valeur propre de A.*

Q 2 *Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A.*

Q 3 *Déterminer une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale.*

Dans la suite, on note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Calcul de A^n

Q 4 *Déterminer P^{-1}.*

Q 5 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Déduire de ce qui précède la matrice A^n.*

Matrices diagonalisables dans la même base que A

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q 6 *On suppose qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^4$ tels que $M = aA^2 + bA + cI_3$.*
On note alors $Q = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ et $Q(A) = aA^2 + bA + cI_3$ (on procède de même pour un polynôme de degré quelconque).
Montrer que $M = Q(A)$ est diagonalisable et préciser $P^{-1}MP$.

Q 7 *Réciproqement, on suppose que $P^{-1}MP$ est diagonale. On pose $P^{-1}MP = \Delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.*
Justifier qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $Q(D) = \Delta$.
En déduire qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $M = Q(A)$.

Polynôme annulateur de A

Q 8 *Calculer $(D + I_3)(D + 2I_3)(D - 3I_3)$.*

Q 9 *En déduire que $\chi_A(A) = 0_{3,3}$.*

(Ce résultat est un cas particulier du théorème de Cayley-Hamilton)

Commutant de A

On pose $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AM = MA\}$ et $E = vect(I_3, A, A^2)$.

Q 10 *Montrer que $E \subset C(A)$.*

Q 11 *On veut montrer l'inclusion réciproque.*

1. *Déterminer $C(D) = \{N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), DN = ND\}$.*
2. *Conclure.*

Racine carrée de A

Q 12 *Montrer qu'il n'existe pas de matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $R^2 = A$.*

Exercice 2: Matrice A semblables à αA

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Soit $K_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega^{n-1} \end{pmatrix}_n$.

Q 13 *Montrer que K_n.est semblable à D_n.*

Q 14 *En déduire que K_n est semblable à ωK_n.*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On suppose que A est semblable à αA.

Q 15 *Montrer que si A est inversible alors $\alpha^n = 1$.*

Q 16 *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lambda \in sp(A)$. On suppose que $\lambda \neq 0$.*

1. *Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}$, $\alpha^i \lambda \in sp(A)$.*
2. *En déduire que $\exists p \in \mathbb{N}^* / \alpha^p = 1$.*

Problème:

Dans tout le problème, les espaces vectoriels sont considérés sur $\mathbb{C}$.
Etant donnés deux entiers naturels n et p non nuls, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et $0_{n,p}$ sa matrice nulle) et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ celui des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et 0_n sa matrice nulle).
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.
Un endomorphisme u de E est dit **échangeur** lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que

$$E = F \oplus G, \ u(F) \subset G \text{ et } u(G) \subset F$$

On dit que u est **de carré nul** lorsque u^2 est l'endomorphisme nul de E. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $u^n = 0$.
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite **de carré nul** lorsque $A^2 = 0$.

L'objectif du problème est, pour un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, d'étudier le lien entre les conditions suivantes :

(C1) l'endomorphisme u est échangeur ;

(C2) il existe $a, b \in \mathcal{L}(E)$, tous deux de carré nul, tels que $u = a + b$;

(C3) il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et de $-u$ sont semblables.

Les parties A et B sont indépendantes entre elles et indépendantes des autres.

A. Quelques considérations en dimension 2

On se donne ici un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 et un endomorphisme non nul u de E vérifiant la condition **(C3).**

Q 17 *Montrer que u est de trace nulle.*

Q 18 *Montrer qu'il existe un vecteur e non nul tel que la famille $(e, u(e))$ soit une base de E.*

Q 19 *Donner la forme de la matrice de u dans la base $(e, u(e))$ et en déduire que que u est échangeur.*

B. La condition (C1) implique (C2) et (C3)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. On considère dans $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice M définie par blocs comme suit:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & B \\ \hline A & 0_p \end{array}\right)$$

Q 20 *Calculer le carré de la matrice* $\left(\begin{array}{c|c} 0_n & B \\ \hline 0_{p,n} & 0_p \end{array}\right)$. *En déduire que M est la somme de deux matrices de carrés nuls.*

Q 21 *On considère dans $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale par blocs* $D = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0_{n,p} \\ \hline 0_{p,n} & -I_p \end{array}\right)$
Montrer que D est inversible, calculer D^{-1} puis DMD^{-1}, et en déduire que M est semblable à $-M$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on se donne un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u est échangeur et on se donne donc une décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces vectoriels vérifiant $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.

Q 22 *On suppose ici F et G tous deux non nuls.*
On se donne une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de F et une base $(g_1, \ldots, g_p)$ de G.
La famille $B = (f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_p)$ est donc une base de E.
Compte-tenu des hypothèses, décrire la forme de la matrice u dans B.

Q 23 *Déduire des questions précédentes que u vérifie **(C2)** et **(C3)**. On n'oubliera pas de considérer le cas où l'un des sous-espaces F ou G est nul.*

C. La condition (C2) implique (C1) : cas d'un automorphisme

Dans cette partie, u désigne un automorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \text{ et } a^2 = b^2 = 0$$

Q 24 *Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0$.*
Montrer que $\dim(\ker(f)) \geq \frac{1}{2}\dim(E)$

Q 25 *Démontrer que $E = \ker(a) \oplus \ker(b)$, et que $\ker(a) = \mathrm{Im}(a)$ et $\ker(b) = \mathrm{Im}(b)$.*

Q 26 *En déduire que u est échangeur.*

D. La condition (C2) implique (C1) : cas non bijectif

Dans cette partie, u désigne un endomorphisme non bijectif d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \text{ et } a^2 = b^2 = 0$$

On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $N_k = \ker(u^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(u^k)$.

Q 27 *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.*

Q 28 *Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, tel que $N_p = N_{p+1}$.*

Q 29 *Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que $\forall k \geq p$, $N_k = N_p$ et $I_k = I_p$.*

Q 30 *Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.*

On pose $F = \ker(u^p)$ et $G = \mathrm{Im}(u^p)$.

Q 31 *Justifier que F et G sont stables par u. On note u_F (et respectivement u_G) l'endomorphisme induit par u sur F (respectivement sur G). Montrer que u_F est nilpotent et u_G est un automorphisme.*

Q 32 *Montrer que $a \circ u^2 = u^2 \circ a$. En déduire que $\forall i \in \mathbb{N}$, N_{2i} et I_{2i} sont stables par a.*

Q 33 *Montrer que G est stable par a et b et que les endomorphismes induits a_G et b_G (par a et b sur G) sont de carré nul.*

Pour cette dernière question, on admet qu'un endomorphisme nilpotent est échangeur.

Q 34 *Montrer que u est échangeur.*

Exercice 1:

Diagonalisation de A

R 1 *On remarque que* $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

R 2 *On a* $\chi_A(x)=\begin{vmatrix}x-6&5&3\\-3&x+2&3\\-5&5&x+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+2&5&3\\x+2&x+2&3\\x+2&5&x+2\end{vmatrix}$

$=(x+2)\begin{vmatrix}1&5&3\\1&x+2&3\\1&5&x+2\end{vmatrix}=(x+2)\begin{vmatrix}1&5&3\\0&x-3&0\\0&0&x-1\end{vmatrix}=(x+2)(x-1)(x-3)$.

On en déduit que $sp(A)=\{1,-2,3\}$.

R 3 $AX=X\Leftrightarrow(A-I_3)X=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5&-5&-3\\3&-3&-3\\5&-5&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}5x_1-5x_2-3x_3=0\\3x_1-3x_2-3x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=0\\x_1-x_2-x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3=0\\x_1=x_2\end{cases}$.

On a donc $E_1(A)=vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

On trouve de même $E_3(A)=vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

On pose $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$. *On a* $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{pmatrix}=D$.

Calcul de A^n

R 4 *Soit* (E_1,E_2,E_3) *la base canonique de* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. *On pose* $U_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},U_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},U_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

On a $P=P_{(E_1,E_2,E_3)\to(U_1,U_2,U_3)}$ *avec* $\begin{cases}U_1=E_1+E_2\\U_2=E_1+E_2+E_3\\U_3=E_1+E_3\end{cases}$

On en déduit $\begin{cases}U_2-U_1=E_3\\U_2-U_3=E_2\\U_3=E_1+(U_2-U_1)\end{cases}$ *donc* $U_3-U_2+U_1=E_1$. *On en déduit que* $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$

R 5 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{pmatrix}=D$ *donc* $A=PDP^{-1}$ *donc* $A^n=(PDP^{-1})^n=PD^nP^{-1}$ *donc*

$A^n=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&(-2)^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^n-(-2)^n+1&(-2)^n-3^n&(-2)^n-1\\1-(-2)^n&(-2)^n&(-2)^n-1\\3^n-(-2)^n&(-2)^n-3^n&(-2)^n\end{pmatrix}$

Matrices diagonalisables dans la même base que A

R 6 *On a* $M = aA^2 + bA + cI_3$ *donc*
$P^{-1}MP = P^{-1}\left(aA^2 + bA + cI_3\right)P = aP^{-1}A^2P + bP^{-1}AP + cP^{-1}I_3P$.
Or $P^{-1}A^kP = \left(P^{-1}AP\right)^k = D^k$ *donc* $P^{-1}MP = aD^2 + bD + cI_3 = Q(D)$.
En utilisant les propriétés des produits de matrices diagonales, on obtient
$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a1^2+b1+c & 0 & 0 \\ 0 & a2^2+b2+c & 0 \\ 0 & 0 & a3^2+b3+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(1) & 0 & 0 \\ 0 & Q(2) & 0 \\ 0 & 0 & Q(3) \end{pmatrix}.$$

R 7 *On pose* $P^{-1}MP = \Delta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$. *D'après la question précédente;* $Q(D) = \begin{pmatrix} Q(1) & 0 & 0 \\ 0 & Q(2) & 0 \\ 0 & 0 & Q(3) \end{pmatrix}$.
On a $Q(D) = \Delta \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} Q(1) = \alpha \\ Q(1) = \beta \\ Q(3) = \gamma \end{array}\right. : (S)$.
Le résultat de cours sur l'interpolation de Lagrange montre qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ *vérifiant* (S) *donc qui vérifie* $Q(D) = \Delta$.
Il existe donc (a,b,c) *tels que* $\Delta = aD^2 + bD + cI_3$. *On en déduit que* $M = aA^2 + bA + cI_3$ *(idem question précédente dans l'autre sens) donc* $M = Q(A)$..

Polynôme annulateur de A

R 8 *On a* $(D - I_3)(D + 2I_3)(D - 3I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3,3}$.

R 9 *D'une part* $P(D - I_3)(D + 2I_3)(D - 3I_3)P^{-1} = P0_{3,3}P^{-1} = 0_{3,3}$.
D'autre part, $P(D - I_3)(D + 2I_3)(D - 3I_3)P^{-1} = P(D - I_3)P^{-1}P(D + 2I_3)P^{-1}P(D - 3I_3)P^{-1}$ *et*
pour tout réel α, $P(D - \alpha I_3)P^{-1} = PDP^{-1} - \alpha PI_3P^{-1} = A - \alpha I_3$ *donc*
$P(D - I_3)(D + 2I_3)(D - 3I_3)P^{-1} = (A - I_3)(A + 2I_3)(A - 3I_3)$
donc $(A - I_3)(A + 2I_3)(A - 3I_3) = 0_{3,3}$ *et en développant,* $A^3 - 2A^2 - 5A + 6I_3 = 0_{3,3}$.
Or $\chi_A(x) = (x+2)(x-1)(x-3) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ *donc* $\chi_A(A) = 0_{3,3}$.

Commutant de A

On pose $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AM = MA\}$ et $E = vect(I_3, A, A^2)$.

R 10 *Soit* $M \in E$. *Il existe donc* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *tels que* $M = aA^2 + bA + cI_3$.
On a donc $AM = A(aA^2 + bA + cI_3.) = aA^3 + bA^2 + cA = (aA^2 + bA + cI_3)A = MA$ *donc* $M \in C(A)$ *donc* $E \subset C(A)$.

R 11 *On veut montrer l'inclusion réciproque.*

1. *Soit* $N = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   On a $ND = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2d & 3g \\ b & -2e & 3h \\ c & -2f & 3i \end{pmatrix}$
   et $DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ -2b & -2e & -2h \\ 3c & 3f & 3i \end{pmatrix}$
   On en déduit que $ND = DN \Leftrightarrow b = c = d = f = g = h = 0 \Leftrightarrow N$ *est diagonale.*

2. *On a $M \in C(A) \Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow P^{-1}APP^{-1}MP = P^{-1}MAP \Leftrightarrow P^{-1}APP^{-1}MP = P^{1}MPP^{-1}AP$ Posons $N = P^{-1}MP$. On a donc $M \in (A) \Leftrightarrow N \in C(D) \Leftrightarrow N$ est diagonale $\Leftrightarrow M \in vect(I_3, A, A^2)$ d'après la question 7*

Racine carrée de A

R 12 *Soit $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Posons $T = P^{-1}PT$.*
On a $R^2 = A \Leftrightarrow P^{-1}R^2P = P^{-1}AP \Leftrightarrow \left(P^{-1}RP\right)^2 = D \Leftrightarrow T^2 = D$.
Or $T^2 = D \Rightarrow TD = T^3 = DT$ donc $T \in C(D)$ et donc $T^2 = D \Rightarrow T$ est diagonale d'après la partie précédente.
Or si $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors $T^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \neq D$ car $b^2 \geq 0$ donc il n'existe pas de matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $R^2 = A$.

Exercice 2: Matrice A semblables à αA

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

$$\text{Soit } K_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega^{n-1} \end{pmatrix}_n.$$

R 13 *D'après un exercice traité en cours, K_n.est semblable à D_n.*

R 14 *On a $D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega^{n-1} \end{pmatrix}$ et $\omega D_n = \begin{pmatrix} \omega & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \omega^{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*
Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à $D_n$et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
On vérifie que $mat_{(e_2,\ldots,e_{n-1},a_1)} = \omega D_n$ donc $(1) : D_n$ est semblable à ωD_n.
De plus $(2) : \omega K_n$ est semblable à ωD_n (car si $D_n = P^{-1}K_nP$ alors $\omega D_n = \omega P^{-1}K_nP = P^{-1}\omega K_nP$
et $(3) : K_n$ est semblable à D_n donc K_n est semblable à ωK_n.

R 15 *Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = \alpha A$. En passant au déterminant,* $\det(P^{-1}AP) = \det(\alpha A)$ *donc* $\det(A) = \alpha^n \det(A)$. *Or A est inversible donc* $\det(A) \neq 0$ *donc $\alpha^n = 1$.*

R 16 *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lambda \in sp(A)$. On suppose que $\lambda \neq 0$.*

1. *Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vecteur propre de A associé à λ. On a $AX = \lambda X$ donc $\alpha AX = \alpha X$ donc X est vecteur propre de αA associé à $\alpha\lambda$.*
   Or A et αA étant semblables, on a $sp(A) = sp(\alpha A)$ donc $\alpha\lambda \in sp(A)$. En itérant, on obtient que Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}$, $\alpha^i\lambda \in sp(A)$.

2. *Or le spectre de A est fini donc $\exists(i,j) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $i \neq j$ et $\alpha^i\lambda = \alpha^j\lambda$. Or $\lambda \neq 0$ donc $\alpha^i = \alpha^j$. En supposant $j > i$, on $a\alpha^{j-i} = 1$ donc $\exists p \in \mathbb{N}^*/\alpha^p = 1$.*

A. Quelques considérations en dimension 2

R 17 *Soit b une base de E dans laquelle $mat\,(u)$ et $mat\,(-u)$ sont semblables. On a alors La trace est linéaire et donc pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $tr(u) = tr\,(mat\,(u)) = tr(mat\,(-u)) = tr\,(-u)$ et $tr(-u) = -tr(u)$ par linéarité de la trace donc $tr\,(u) = 0$.*

R 18 *Supposons dans un premier temps que $\forall x \in E$ la famille $(x, u\,(x))$ est liée.*
Soit $b = (e_1, e_2)$ une base de E. On a $u\,(e_i)$ colinéaire à e_i donc la matrice M de u est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.
On a alors par linéarité, $u\,(e_1 + e_2) = \lambda e_1 + \mu e_2$ et il existe un réel γ tel que $u\,(e_1 + e_2) = \gamma\,(e_1 + e_2)$ donc $\lambda e_1 + \mu e_2 = \gamma\,(e_1 + e_2)$ soit $(\lambda - \gamma)\,e_1 + (\lambda - \gamma)\,e_2 = 0$.donc $\lambda = \gamma = \mu$ par liberté de (e_1, e_2) donc $tr\,(u) = tr\,(M) = 2\lambda$ et $tr\,(u) = 0$ donc $\lambda = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $u \neq 0$.
On en déduit qu'il existe un vecteur e non nul tel que la famille $(e, u\,(e))$ soit libre et donc une base de E (car $\dim(E) = 2$).

R 19 *La matrice de u dans la base $(e, u\,(e))$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & y \end{pmatrix}$ avec $y = 0$ car $tr\,(u) = 0$. Posons $D_1 = vect\,(e)$ et $D_2 = vect\,(u\,(e))$.La famille $(e, u\,(e))$ est une base de E donc $E = D_1 \oplus D_2$. On a $u\,(D_1) = vect\,(u\,(e)) = D_2$ et $u\,(D_2) = vect\,(u\,(u\,(e))) = vect\,(xe) \subset D_1$. Or déduire que que u est échangeur.*

B. La condition (C1) implique (C2) et (C3)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. On considère dans $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice M définie par blocs comme suit:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & B \\ \hline A & 0_p \end{array}\right)$$

R 20 *Le calcul du produit par bloc donne $\left(\begin{array}{c|c} 0_n & B \\ \hline 0_{p,n} & 0_p \end{array}\right)^2 = 0$ et $\left(\begin{array}{c|c} 0_n & B \\ \hline A & 0_p \end{array}\right)^2 = 0$ donc $M = M_1 + M_2$ avec $M_1 = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & B \\ \hline A & 0_p \end{array}\right)$ et $M_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & B \\ \hline 0_{p,n} & 0_p \end{array}\right)$ qui sont de carrés nuls.*

R 21 *Le calcul du produit par bloc donne $D^2 = I_{n+p}$ donc D est inversible et $D^{-1} = D$.*

$$D = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0_{n,p} \\ \hline 0_{p,n} & -I_p \end{array}\right)$$

Le calcul du produit par bloc donne $D^1 MD = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0_{n,p} \\ \hline 0_{p,n} & -I_p \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 0_n & B \\ \hline A & 0_p \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0_{n,p} \\ \hline 0_{p,n} & -I_p \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & B \\ \hline -A & 0_p \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0_{p,n} & - \end{array}\right.$
$\left(\begin{array}{c|c} 0_n & -B \\ \hline -A & 0_p \end{array}\right) = -M$ donc M est semblable à $-M$.

R 22 *Si $1 \leq j \leq n$ alors $f_j \in F$ donc $u\,(f_j) \in G$ donc il existe $a_{1,j}, \ldots a_{p,j}$ tels que $u\,(f_j) = a_{1,j} g_1 + \cdots + a_{p,j} g_p$. De même si $1 \leq j \leq p$ alors $g_j \in G$ donc $u\,(g_j) \in F$ donc il existe $b_{1,j}, \ldots b_{n,j}$ tels que $u\,(g_j) = b_{1,j} f_1 + \cdots + b_{n,j} g_n$. On en déduit que $mat_B\,(u) = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & B \\ \hline A & 0_p \end{array}\right)$.*

R 23 *Supposons que F et G ne sont par réduits à $\{0\}$. Il existe, d'après la question précédente„ une base B de E dans laquelle* $mat_B(u) = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & B \\ \hline A & 0_p \end{array}\right) = M = M_1 + M_2$ *avec* $M_i^2 = 0$ *d'après Q 20.*
*Soit a et b les endomorphisme de matrice M_1 et M_2 dans B. On a $u = a + b$ et $a^2 = b^2 = 0$ donc u vérifie **(C2)** d'après Q4.*
*Dans cette base B, la matrice de u est semblable à celle de $-u$ (d'après Q 21) donc u vérifie **(C3)**.*
*Supposons que $F = \{0\}$. On a $G = E$ et $\mathrm{Im}(u) = u(G) \subset F = \{0\}$. u est l'endomrophisme nul qui vérifie immédiatement **(C2)** et **(C3)**. C'est la même chose si $G = \{0\}$.*

C. La condition (C2) implique (C1) : cas d'un automorphisme

R 24 *On sait que* $g \circ f = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$ *donc* $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$. *Or* $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$ *donc* $2\dim(\ker(f)) \geq \dim(E)$ *donc* $\dim(\ker(f)) \geq \frac{1}{2}\dim(E)$.

R 25 *Soit* $x \in \ker(a) \cap \ker(b)$. *On a* $u(x) = a(x) + b(x) = 0$ *et comme u est injective $x = 0$. Ceci montre que* $\ker(a) \cap \ker(b) = \{0\}$ *donc* $\ker(a) + \ker(b)$ *est une somme directe et* $\dim(\ker(a) + \ker(b)) = \dim(\ker(a)) + \dim(\ker(b)) \geq \dim(E)$ *d'après la question précédente.car* $a^2 = b^2 = 0$.
On en déduit que $\dim(\ker(a) + \ker(b)) = \dim(E)$ *et donc* $\ker(a) + \ker(b) = E$ *et* $E = \ker(a) \oplus \ker(b)$. *Cela entraîne donc que* $\dim(\ker(a)) = \dim(\ker(b)) = \dfrac{1}{2}\dim(E)$ *(car les inégalités strictes ne sont pas possibles). Par le théorème du rang,* $\dim(\ker(a)) = \dim(\mathrm{Im}(a))$ *et* $\mathrm{Im}(a) \subset \ker(a)$ *donc* $\mathrm{Im}(a) = \ker(a)$ *et de même* $\mathrm{Im}(b) = \ker(b)$.

R 26 *Posons* $F = \ker(a)$ *et* $G = \ker(b)$. *On a* $E = F \oplus G$ *et si* $x \in F$ *alors* $u(x) = a(x) + b(x) = b(x) \in \mathrm{Im}(b) = \ker(b) = G$ *donc* $u(F) \subset G$ *et de même* $u(G) \subset F$.

D. La condition (C2) implique (C1) : cas non bijectif

Dans cette partie, u désigne un endomorphisme non bijectif d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \text{ et } a^2 = b^2 = 0$$

On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $N_k = \ker(u^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(u^k)$.

R 27 *On sait que* $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ *donc* $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$ *donc la suite* $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est croissante pour l'inclusion. De même,* $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ *donc* $\mathrm{Im}(u^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(u^k)$ *donc la suite* $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est croissante pour l'inclusion et que la suite* $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est décroissante pour l'inclusion.*

R 28 *On montre directement un peu plus que ce qui est demandé:*
L'ensemble $\left\{\dim\left(\ker(u^k)\right), k \in \mathbb{N}\right\}$ *est un ensemble d' entiers majoré par* $\dim(E)$. *Il est donc fini donc admet un maximum.*
il existe un entier naturel p tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dim\left(\ker(u^k)\right) \leq \dim(\ker(u^p))$. *Si $k \geq p$, on a* $\ker(u^p) \subset \ker(u^k)$ *donc* $\dim\left(\ker(u^k)\right) \geq \dim(\ker(u^p))$ *donc* $\dim\left(\ker(u^k)\right) = \dim(\ker(u^p))$ *donc* $\ker(u^k) = \ker(u^p)$.

R 29 *Par le théorème du rang, on en déduit que si $k \geq p$, on a* $\dim\left(\mathrm{Im}(u^k)\right) = \dim(\mathrm{Im}(u^p))$ *et, comme* $\mathrm{Im}(u^k) \subset \mathrm{Im}(u^p)$, *on a* $\mathrm{Im}(u^k) = \mathrm{Im}(u^p)$.

R 30 *Montrons que* $\ker(u^p) \cap \mathrm{Im}(u^p) = \{0\}$. *Soit* $x \in \ker(u^p) \cap \mathrm{Im}(u^p)$. *Il existe $t \in E$ tel que $x = u^p(t)$.donc et* $u^{2p}(t) = u^p(x) = 0$ *donc* $t \in \ker(u^{2p}) = \ker(u^p)$ *donc* $x = u^p(t) = 0$. *En ulitlisant le théorème du rang,* $\dim(\ker(u^p)) \cap \dim(\mathrm{Im}(u^p)) = \dim(E)$ *donc* $E = N_p \oplus I_p$.

R 31 *Soit* $x \in F$. *Montrons* $u(x) \in F$, *soit* $u^p(u(x)) = 0$. *On a* $u^p(u(x)) = u^{p+1}(x) = u(u^p(x)) = u(0) = 0$ *donc* F *est stable par* g.
Soit $x \in G$. *Montrons* $u(x) \in G$. $x \in G$ *donc il existe* $t \in E$ *tel que* $u^p(t) = x$. *On a donc*0. *On a* $u(x) = u^{p+1}(t) = u^p(u(t)) \in \mathrm{Im}(u^p) = G$ *donc* G *est stable par* u.
Soit $x \in F$. *On a* $(u_F)^p(x) = u^p(x) = 0$ *donc* $(u_F)^p = 0$ *donc* u_F *est nilpotent.*
Soit $x \in \ker(u_G)$; *on a* $u_G(x) = u(x) = 0$ *donc* $x \in \ker(u) \subset \ker(u^p) = F$ *et* $x \in G$.*donc* $x = 0$ *donc* $\ker(u_G) = \{0\}$ *et* u_G *est un endomorphisme entre espaces identiques (donc de même dimension) donc est un automorphisme.*

R 32 *On* $a \circ u^2 = a \circ (a^2 + a \circ b + b \circ a + b^2) = a \circ (a \circ b + b \circ a) = a^2 \circ b + a \circ b \circ a = a \circ b \circ a$. *On obtient de même que* $u^2 \circ a = a \circ b \circ a$ *donc* $a \circ u^2 = u^2 \circ a$.

R 33 *De l'égalité* $a \circ u^2 = u^2 \circ a$, *on montre par récurrence que pour tout* $k \in \mathbb{N}.a \circ u^{2k} = u^{2k} \circ a$.
Montrons que $\ker(u^{2p})$ *est stable par* a.
Soit $x \in \ker(u^{2p})$. *Montrons que* $a(x) \in \ker(u^{2p})$ *c'est-à-dire* $u^{2p}(a(x)) = 0_E$.
On a $u^{2p}(a(x)) = u^{2k} \circ a(x) = a \circ u^{2k}(x) = a(0_E) = 0_E$ *car* $x \in \ker(a^{2p})$ *donc* $\ker(u^{2p})$ *est stable par* a.
Montrons que $\mathrm{Im}(u^{2p})$.*est stable par* a.
Soit $y \in \mathrm{Im}(u^{2p})$. *Montrons que* $a(y) \in \mathrm{Im}(u^{2p})$
$y \in \mathrm{Im}(u^{2p})$ *donc* $\exists t \in E, y = u^{2p}(t)$ *donc* $a(y) = a \circ u^{2p}(t) = u^{2p} \circ a(t) = u^{2p}(x) \in \mathrm{Im}(u^{2p})$ *avec* $x = a(t) \in E$.
donc $\mathrm{Im}(u^{2p})$.*est stable par* a.
Le même raisonnement peut se faire avec b. *Si* $x \in G$, *alors* $(a_G)^2(x) = a^2(x) = 0$ *donc* $(a_G)^2 = 0$. *De même* b_G *est de carré nul.*

Pour cette dernière question, on admet qu'un endomorphisme nilpotent est échangeur.

R 34 *D'après les questions précédentes,* u_G *est un automorphisme de* G *et* $u = a_G + b_G$ *et* $a_G^2 = b_G^2 = 0$ *donc d'après la partie C,* u_G *est échangeur: il existe* G_1 *et* G_2.*sous espaces vectoriels de* G *tels que* $G = G_1 \oplus G_2$, $u(G_1) \subset G_2$ *et* $u(G_2) \subset G_1$.
L'endomorphisme u_F *est nilpotent donc est échangeur donc d'après le résultat admis, il existe une décomposition* $F = F_1 \oplus F_2$ *telle que* $u(F_1) \subset F_2$ *et* $u(F_2) \subset F_1$.
En posant $H_1 = F_1 \oplus G_1$ *et* $H_2 = F_2 \oplus G_2$ *(le caractère direct des somme découle de* $F \oplus G$*), on a alors* $E = H_1 \oplus H_2$ *(on décompose sur* F *et* G *et on décompose chaque composante) et* $u(H_1) \subset H_2$, $u(H_2) \subset H_1$. *Ainsi* u *est échangeur.*