DM 7, pour le vendredi 8 ou mardi 12 novembre 2024

Exercice 1:

On note F l'espace vectoriel des fonctions définies sur $J =]-1, +\infty[$ à valeurs réelles.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [[-1, p]]$, on définit les fonctions f_k sur J par:

$$\forall x \in J,\ f_{-1}(x) = \ln(1+x) \text{ et } \forall k \in [[0,p]],\ f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}.$$

Etude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions

Q 1 *Soit $(a_k)_{k \in [[-1,p]]}$ des réels tels que $\sum_{k=-1}^{p} a_k f_k$ est la fonction nulle.*
Démontrer que $a_{-1} = 0$.

Q 2 *Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (f_k)_{k \in [[-1,p]]}$ est libre.*
On note $E = vect(\mathcal{B})$.

Q 3 *En déduire la dimension de E.*

Etude d'un endomorphisme

On note u l'application qui à toute fonction de E associe la fonction g définie sur J par:

$$\forall x \in J,\ g(x) = (1+x) f'(x).$$

Q 4 *Déterminer, pour $k \in [[-1,p]]$, les images de f_k par u.*

Q 5 *Vérifier que u est un endomorphisme de E.*

Q 6 *Déterminer le noyau et l'image de u.*

Q 7 *Préciser $u^{-1}(\{f_{-1}\})$, l'ensemble des antécédents de f_{-1}.*

Q 8 *Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$.*

Q 9 *L'endomorphisme u est-il diagonalisable?*

Q 10 *L'endomorphisme u^2 est il diagonalisable?*

Solutions d'équations

Q 11 *Résoudre sur J l'équation différentielle (ED) : $f_{-1}(t) = (1+t) y'(t)$.*

Soit h_2 la solution de l'équation différentielle (ED) nulle en 0.

Q 12 *On note h_3 la solution de l'équation différentielle $h_2(t) = (1+t) y'(t)$ nulle en 0.*
Expliciter h_3.

Q 13 *En itérant le procédé, pour tout entier naturel $k \geq 2$, on note h_k la solution nulle en 0 de l'équation différentielle $h_{k-1}(t) = (1+t) y'(t)$.*
Expliciter h_k.

Etude de la fonction $x \mapsto \sum_{k=2}^{+\infty} h_k(x)$

Q 14 *Soit $x > -1$. Montrer que la série numérique $\sum_{k \geq 2} h_k(x)$ converge. On pose $H(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} h_k(x)$. Calculer $H(x)$.*

Q 15 *La fonction H appartient elle à E?*

Q 16 *En utilsant la question 14. vérifier que H est dérivable et que $H' \in E$.*

I Exercice 2: Fonction de classe C^∞ non développable en série entière

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Q 17 *Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.*

Q 18 *Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.*

Q 19 *Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left| \dfrac{f(x)}{x^n} \right| = 0$.*

Q 20 *Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.*

Q 21 *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que*
- g est de classe C^∞ sur $]a, +\infty[$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ il existe $l_n \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g^{(n)}(x) = l_n$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g est de classe C^n sur $[a, +\infty[$.

Q 22 *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x)$.*

Q 23 *Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Q 24 *En déduire qu'il n'existe pas de réel $r > 0$ pour lequel f est développable en série entière sur $]-r, r[$.*

Exercice 1:

Etude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions

R 1 *On a* $\forall x \in J,\ \sum_{k=-1}^{p} a_k f_k(x) = 0$. *Or* $\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \geq 0 \\ +\infty \text{ si } k = -1 \end{cases}$.
Si $a_{-1} \neq 0$, *alors* $\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=-1}^{p} a_k f_k(x) = \pm\infty$ *ce qui contredit l'hypothèse* $\sum_{k=-1}^{p} a_k f_k = 0$ *donc* $a_{-1} = 0$.

R 2 *On en déduit que* $\forall x \in J,\ \sum_{k=0}^{p} a_k f_k(x) = 0$ *donc, en multipliant l'égalité par* $(1+x)^p$,
$\forall x \in J,\ a_0(1+x)^p + a_1(1+x)^{p-1} + \cdots a_{p-1}(1+x) + a_p = 0$. *On a donc* $\forall z \in]0,+\infty[,\ a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \cdots a_{p-1} z + a_p = 0$. *Le polynôme* $a_0 X^p + a_1 X^{p-1} + \cdots a_{p-1} X + a_p$ *admet donc une infinité de racines donc est nul donc* $\forall k \in [[0,k]],\ a_k = 0$. *On en déduit que la famille* $\mathcal{B} = (f_k)_{k\in[[-1,p]]}$ *est libre.*

R 3 *Par définition la famille* $\mathcal{B}$ *est génératrice de* E *et elle est libre d'après la question précédente donc c'est une base de* E *qui est donc de dimension* $p+2$.

Etude de l'endomorphisme u

R 4 *Posons* $g_k = u(f_k)$. *On a* $g_{-1}(x) = 1$ *et* $g_0(x) = 0$ *et*
si $k \geq 1$ *alors* $g_k(x) = (1+x) \times \dfrac{-k}{(1+x)^{k+1}} = -k f_k(x)$. *On a donc*

$$u(f_{-1}) = f_0,\ u(f_0) = 0 \text{ et si } k \geq 1,\ u(f_k) = k f_k.$$

R 5 *Soit* $(h_1,h_2) \in E$ *et* $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. *Posons* $g = u(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)$.
On a $\forall x \in J,\ g(x) = (1+x)(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2)'(x) = (1+x)(\lambda_1 h_1'(x) + \lambda_2 h_2'(x))$ *donc*
$g(x) = \lambda_1(1+x)h_1'(x) + \lambda_2(1+x)h_2'(x)$. *On en déduit que* $u(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) = \lambda_1 u(h_1) + \lambda_2 u(h_2)$ *donc* u *est linéaire.*
On a donc $u\left(\sum_{k=-1}^{p} a_k f_k\right) = \sum_{k=-1}^{p} a_k u(f_k) \in E$ *d'après la question précédente. On en déduit que* u *est un endomorphisme de* E.

R 6 *La famille* $(f_k)_{k\in[[-1,p]]}$ *est une base de* E *donc d'après le cours,* $\operatorname{Im}(u) = \text{vect}(u(f_k), k \in [[-1,p]])$. *On déduit de la question 2.1. que* $\operatorname{Im}(u) = \text{vect}(f_k, k \in [[0,p]])$ *et* $\operatorname{Im}(u)$ *est de dimension* $p+1$ *car la famille* $(f_k)_{k\in[[0,p]]}$ *est libre. Le théorème du rang donne alors que* $\dim(\ker(u)) + (p+1) = p+2$ *donc* $\dim(\ker(u)) = 1$. *Or* $f_0 \in \ker(u)$ *donc* $\ker(u) = \text{vect}(f_0)$.

R 7 *La famille* $(f_k)_{k\in[[-1,p]]}$ *est libre donc* $f_{-1} \notin \text{vect}\left((f_k)_{k\in[[0,p]]}\right) = \operatorname{Im}(u)$. *On en déduit que* f_{-1} *n'admet pas d'antécédent par* u *donc que* $u^{-1}(\{f_{-1}\}) = \emptyset$.

R 8 *On déduit de la question 4. que* M *est la matrice définie par blocs par*

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0_{2,p} \\ 0_{p,2} & M_2 \end{pmatrix} \text{ avec } M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p \end{pmatrix}.$$

R 9 *On a* $\chi_M(x) = \det\begin{pmatrix} xI_2 - M_1 & 0_{2,p} \\ 0_{p,2} & xI_p - M_2 \end{pmatrix} = \chi_{M_1}(x)\chi_{M_2}(x)$ *par la formule du déterminant triangulaire par blocs. Or* $\chi_{M_1}(x) = x^2$ *donc* $\chi_M(x) = x^2 \sum_{k=1}^{p}(X-k)$. *On en déduit que* 0 *est valeur propre* u *de multiplicité* $m(0) = 2$ *et de sous-espace propre associé* $E_0(u) = \ker(u)$ *qui est de dimension* 1. *On a* $\dim(E_0(u)) < m(0)$ *donc* u *n'est pas diagonalisable.*

R 10 *On remarque que* $M_1^2 = 0$ *et* M_2^2 *est diagonale comme carré d'une matrice diagonale donc, par produit par bloc,* $M^2 = \begin{pmatrix} M_1^2 & 0_{2,p} \\ 0_{p,2} & M_2^2 \end{pmatrix}$ *est diagonale donc l'endomorphisme* u^2 *est diagonalisable.*

Solutions d'équations

R 11 *L'équation* (ED) *équivaut sur* J *à* $y'(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$.

Une primitive sur J *de* $t \mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$ *est* $t \mapsto \frac{1}{2}(\ln(1+t))^2$ *donc les fonctions* $t \mapsto \frac{1}{2}(\ln(1+t))^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$ *sont les solutions de* (ED).

R 12 *On a donc* $h_2(t) = \frac{1}{2}(\ln(1+t))^2$. *On a* $h_2(t) = (1+t)y'(t) \Leftrightarrow y'(t) = \dfrac{\frac{1}{2}(\ln(1+t))^2}{1+t} = \frac{1}{2}f_{-1}^2(t)\, f'_{-1}(t)$ *donc les solutions de cette équation sont les fonctions* $\frac{1}{3!}f_{-1}^3 + C$ *avec* $C \in \mathbb{R}$. *Une telle fonction s'annulle en* 0 *si et seulement si* $C = 0$ *donc* $h_3 = \frac{1}{3!}f_{-1}^3$.

R 13 *Soit* $k \geq 3$. *Supposons que* $h_{k-1} = \dfrac{(f_{-1})^{k-1}}{(k-1)!}$

L'équation différentielle $h_{k-1}(t) = (1+t)y'(t)$.*équivaut sur* J *à* $y'(t) = \dfrac{(f_{-1})^{k-1}(t)}{(k-1)!\,(1+t)} = \dfrac{(f_{-1})^{k-1}(t)\,(f_{-1})'(t)}{(k-1)!}$ *donc admet pour solutions les fonctions* $t \mapsto \dfrac{(f_{-1})^k(t)}{k!} + C$. *Une telle fonction s'annule en* 0 *si et seulement si* $C = 0$. *On en déduit que* $h_k = \dfrac{(f_{-1})^k}{k!}$.

Etude de la fonction H

R 14 *On a* $h_k(t) = \dfrac{(\ln(1+t))^k}{k!}$ *et la série* $\sum\limits_{k \geq 0} \dfrac{(\ln(1+t))^k}{k!}$ *converge et a pour somme* $\exp(\ln(1+t)) = 1+t$.

On en déduit que $H(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(\ln(1+t))^k}{k!} - (1 + \ln(1+t)) = t - \ln(1+t)$.

R 15 *Si la fonction* H *était dans* E, *alors la fonction* $H_1 = H + f_{-1} : t \mapsto t$ *serait aussi dans* E. *Pour tout* $k \in [[-1, p]]$, $f_k(t) = o_{t\to\infty}(H_1(t))$ *donc pour toute famille* (a_k) *de réels,* $\sum\limits_{k=-1}^{p} a_k f_k(t) = o_{t\to\infty}(H_1(t))$. *On en déduit que* $H_1 \neq \sum\limits_{k=-1}^{p} a_k f_k$ *donc* $H \notin E$.

R 16 *On a, pour* $t \in J$, $H(t) = t - \ln(1+t)$ *donc* H *est dérivable de dérivée* $H'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t}$ *donc* $H' = f_0 - f_1 \in E$.

Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

R 17 *La fonction* f *est continue sur* $\mathbb{R}^*$ *(th opérations). On a* $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ *donc par composition des limites,* $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} f(x) = 0 = f(0)$ *donc* f *est continue en* 0 *donc sur* $\mathbb{R}$.

R 18 *La fonction* f *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^*$ *(th opérations). La dérivée sur* $\mathbb{R}^*$ *de* $x \mapsto \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ *est* $x \mapsto -2x^{-3} = \dfrac{-2}{x^3}$ *donc, pour* $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{-2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$.

R 19 *Pour* $x \in \mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{f(x)}{x^n}\right| = \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{|x|^n}$. *Si* $X = \frac{1}{x^2}$, *alors* $X^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{|x|}$ *donc* $\left|\dfrac{f(x)}{x^n}\right| = X^{\frac{n}{2}} \times e^{-X}$.

Or $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} X^{\frac{n}{2}} \times e^{-X} = 0 : (C.C) \end{cases}$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left|\dfrac{f(x)}{x^n}\right| = 0$.

R 20 *La fonction* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^*$ *(déjà vu).*
Pour $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{-2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$ *donc d'après ce qui précède,* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = 0$ *et nous avons vu que* f *était continue en* 0.
Le théorème de limite de la dérivée entraîne donc que f *est dérivable en* 0 *et* $f'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = 0$, *ce qui donne la continuité de* f' *en* 0 *donc* f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$.

R 21 *Montrons par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}$ *que* g *est de classe* C^n.
- $n = 0$*: La fonction* g *est continue donc de classe* C^0*.sur* $[a, +\infty[$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* g *est de classe* C^n *sur* $[a, +\infty[$. *Montrons qu'elle est de classe* C^{n+1} *sur* $[a, +\infty[$.
Elle l'est par hypothèse sur $]a, +\infty[$.
De plus,
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} g^{(n)\prime}(x) = l_{n+1}$ *et* $g^{(n)}$ *est continue en* a *par hypothèse de récurrence donc*
Le théorème de limite de la dérivée entraîne donc que $g^{(n)}$ *est dérivable en* 0 *et* $g^{(n)\prime}(0) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} g^{(n)\prime}(x) = l_{n+1}$.
La fonction g *admet donc une dérivée* $(n+1)^{\text{ème}}$ *en* a *et* $g^{(n+1)}(0) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} g^{(n+1)}(x)$ *donc* $g^{(n+1)}$ *est continue en* a *donc sur* $[a, +\infty[$.
On en déduit que g *est de classe* C^{n+1} *sur* $[a, +\infty[$.

R 22 *Montrons par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}^*$, *qu"il existe un polynôme* P_n *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x)$.
-c'est vrai pour $n = 1$ *(Prendre* $P_1 = -2$*).*
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Supposons qu'il existe un polynôme* P_n *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x)$.
$f^{(n)}(x) = (P_n(x) x^{-3n}) f(x)$ *donc* $f^{(n+1)}(x) = (P_n'(x) x^{-3n} + P_n(x) \times (-3n) x^{-3n-1}) f(x) + (P_n(x) x^{-3n}) f'(x)$ *donc*
$f^{(n+1)}(x) = (x^3 P_n'(x) x^{-3n-3} + x^2 P_n(x) \times (-3n) x^{-3n-3}) f(x) + (P_n(x) x^{-3n})(-2x^{-3}) f(x)$ *donc*
$f^{(n+1)}(x) = \dfrac{x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x) - 2P_n(x)}{x^{3n+3}} f(x)$.
La dérivée d'un polynôme est un polynôme donc l'égalité $P_{n+1} = X^3 P_n' - (3nX^2 + 2) P_n$ *définit bien un polynôme qui vérifie* $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}} f(x)$, *ce qui achève la récurrence.*

R 23 *On applique la question 21 à* f *sur* $[0, +\infty[$ *et sur* $]-\infty, 0]$. *On sait que* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \left|\dfrac{f(x)}{x^n}\right| = 0$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{f(x)}{x^{3n}} = 0$*.et* P_n *admet une limite réelle en* 0 *donc* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f^{(n)}(x) = 0$ *et* f *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^*$. *On en déduit que* $\forall n \in \mathbb{N}$, f *est de classe* C^n *sur* $\mathbb{R}$ *(donc est* C^∞*) et* $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f^{(n)}(x) = 0$.

R 24 *Supposons qu'il existe* $r > 0$ *pour lequel* f *est développable en série entière sur* $]-r, r[$. *On aurait alors d'après le cours* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *avec* $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$ *d'après la question précédente. Cela entraînerait que* $\forall x \in]-r, r[$ $f(x) = 0$, *ce qui n'est pas le cas, donc 'il n'existe pas de réel* $r > 0$ *pour lequel* f *est développable en série entière sur* $]-r, r[$.