Semaines 7 et 8

Questions avec $(*)$: plus délicate (droit à joker pour la question de cours) mais peut faire l'objet d'un exercice avec des indications.

Contenu:

- espaces préhilbertiens réels: produit scalaire, Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire, orthogonalité, procédé de Schmidt, projection orthogonale, hyperplans et formes linéaires
- trigonalisation
- exemples suites récurrentes linéaires (rien n'est explicitement au programme)

Questions de cours:

1. Définition d'un produit scalaire. Donner sans démonstration le développement de $\left(\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i u_i \mid \sum\limits_{j=1}^{q} \mu_j v_j\right)$. Application au développement de $\left\|\sum\limits_{i=0}^{n} u_i\right\|^2$.
2. Démontrer une identité de polarisation et l'identité du parallèlogramme.
3. Donner sans démonstration l'inégalité de Cauchy-Schwarz. L'appliquer au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et au produit scalaire usuel de $C\left([a,b],\mathbb{R}\right)$.
4. Soit $x_1, x_2, ...x_n$ des réels. Montrer que $(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 \leq n \times \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)$.
5. Expression du produit scalaire, de la norme et des coordonnées en B.O.N. Expression matricielle.
6. Si X et Y sont deux vecteurs colonnes de même taille, nature de $X^T \times Y$ et $X \times Y^{\ T}$?
7. $\{v_1, v_2, ..., v_k\}^{\perp} = \left(vect\left(v_1, v_2, ..., v_k\right)\right)^{\perp}$.
8. Une somme de sous-espace vectoriels orthogonaux est directe.
9. On pose, pour $p \in \mathbb{N}$, $f_p(x) = \cos(px)$ Montrer que la famille (f_p) est une famille orthogonale de $C\left([0, 2\pi], \mathbb{R}\right)$ muni de son produit scalaire usuel.
10. Démontrer le théorème de Pythagore (développement de $\left\|\sum\limits_{i=0}^{n} u_i\right\|^2$ pour des vecteurs deux à deux orhogonaux).
11. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, on pose $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (1,1,0)$. Justifier que (u_1, u_2, u_3) est une base de E. Appliquer le procédé de Schmidt pour obtenir une base orthonormée (v_1, v_2, v_3) à partir de la famille (u_1, u_2, u_3).
12. Soit un espace préhilbertien E et F un sous espace vectoriel de dimension finie de B.O.N $(e_1, \ldots, e_k)$ de E. donner sans démonstration l'expression de $p_F(x)$, projeté orthogonal de x sur F. Que devient la formule si la base est seulement orthogonale?
13. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E espace préhilbertien et $x \in E$, alors $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$ où $p_F(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F.
14. Soit $n = (a, b, c)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $vect(n)$.
15. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E espace préhilbertien et $x \in E$, alors pour tout $y \in F$, $d(x, y) \geq d(x, p_F(x))$ où $p_F(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F.
16. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E espace préhilbertien et $x \in E$. Si $(v_1, \ldots, v_k)$ est une base de F.
$$y = p_F(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{il existe des réels } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \text{ tels que } y = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \\ \forall i \in [[1, k]]\ (x - y | v_i) = 0 \end{array}\right.$$
17. $(*)$ On considère l'ensemble $E = \mathcal{C}\left([0,1], \mathbb{R}\right)$ muni de son produit scalaire usuel et $g_i : t \mapsto t^i$. Déterminer le projeté orthogonal de g_2 sur le sous-espace vectoriel $F = vect(g_0, g_1)$ (résoudre cette question sans passer par une BON de F). En déduire la valeur de $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^2 - (at + b)\right)^2 dt$.
18. Soit E un espace euclidien et H un hyperplan de E de vecteur normal n et $x \in E$. Exprimer la distance de x à H et celle de x à $vect(n)$ en fonction de x et n.
19. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\ker(A) = \ker\left(A^T \times A\right)$ et $\mathrm{Im}\left(A^T\right) = \mathrm{Im}\left(A^T \times A\right)$ (exo).

20. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Exprimer $tr\left(A^T \times B\right)$ à l'aide des coefficients de A et B. Montrer que $(A|B) = tr\left(A^T \times B\right)$ définit un produit scalaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

21. Soit $a \in E$ et f l'application de E espace préhilbertien dans E définie par $f(x) = x - 2\frac{(a|x)}{(a|a)}a$. Reconnaître l'application f (exo).

22. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et f canoniquement associée à A. La matrice A est-elle diagonalisable? Soit e_1 un vecteur propre et $b = (e_1, e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un réel $\alpha \neq 0$ tels que $mat_b(f) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

23. Rappeler le théorème de diagonalisation portant sur le polynôme caractéristique. Donner sans démonstration une condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité. Que peut-on dire d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

24. Citer et démontrer un théorème sur la somme et le produit des valeurs propres en utilisant la trigonalisation.

25. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose que $tr(M) = 5$ et $tr\left(M^2\right) = 13$. Que peut-on dire de M?

26. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si A est nilpotente et $\lambda \in sp(A)$ alors $\lambda = 0$. En déduire qu'une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à coefficients diagonaux tous nuls.

27. Soit (u_n) une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+2} + 4u_{n+1} - 12u_n$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

    - Déterminer une matrice A carrée de taille 3 telle que la suite $(u_n) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$. Exprimer X_n en fonction de X_0, A et n.
    - On admet que $sp(A) = \{-2, 2, 3\}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \in E_{-2}(A)$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in E_2(A)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \in E_3(A)$.
    - On suppose que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$. Décomposer X_0 suivant une base de vecteurs propres de A

      Exprimer u_n en fonction de n (on ne calculera pas d'inverse de matrice).

28. Déterminer les suites réelles (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

29. Déterminer les suites réelles (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2\sqrt{3}u_{n+1} - 4u_n$.