DM 8 (pour le 15 novembre 2024)

Exercice 1:

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.
Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose :

$$(P|Q) = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

Q 1 *Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.*

Q 2 *En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, déterminer une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de E pour ce produit scalaire*

Q 3 *Soit $U = X^2 - 4$. Déterminer le projeté orthogonal de U sur $\mathbb{R}_1[X]$.
En déduire la distance du polynôme U à $\mathbb{R}_1[X]$.*

Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$.

Q 4 *Montrer que l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(P) = P(1)$ est une forme linéaire.*

Q 5 *En déduire que H est un sous-espace vectoriel de E et préciser la dimension de H.*

Q 6 *Justifier que $H^\perp = vect(1)$. Retrouver le résultat de la question précédente.*

Q 7 *Soit p la projection orthogonale sur H. Déterminer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$.*

On pose maintenant $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $(P|Q) = \sum\limits_{i=0}^{n} P^{(i)}(1)Q^{(i)}(1)$. On admet que cette égalité définit un produit scalaire de E.

Q 8 *On pose, pour $i \in [[0, n]]$, $P_i = \dfrac{1}{i!}(X-1)^i$. Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base orthonormée de E.*

Q 9 *Soit $k \in [[1, n-1]]$. Montrer que $(\mathbb{R}_k[X])^\perp$ est l'ensemble des polynômes $P \in E$ multiples de $(X-1)^{k+1}$.*

Q 10 *Reconnaître la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_k[X]$.*

Exercice 2:

Le but de l'exercice est de déterminer $d = \inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sqrt{\int_0^1 \left(\sqrt{t} - at - b\right)^2 dt}$.

Q 11 *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose, pour $t \in [0, 1]$, $f(t) = \sqrt{t}$ et $P(t) = at + b$.
Ecrire le réel $\sqrt{\int_0^1 \left(\sqrt{t} - at - b\right)^2 dt}$ à l'aide de f, P et d'une norme euclidienne d'un espace préhilbertien E que l'on précisera.*

Q 12 *Ecrire le réel d sous la forme $d(f, F)$ ou F est un sous-espace vectoriel de E à préciser.*

Q 13 *Déterminer le projeté orthogonal de f sur F.*

Q 14 *Conclure.*

Exercice 3:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est diagonalisable et $sp(A) \subset]-1, 1[$.

Q 15 *Justifier que $A - I_n$ est inversible.*

Q 16 *Justifier qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in]-1, 1[^n$ tels que*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = D.$$

Q 17 *En déduire que la suite* $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge vers la matrice nulle.*

Q 18 *Pour* $p \in \mathbb{N}$, *on pose* $A_p = I_n + A + \cdots + A^p$ *et* $D_p = I_n + D + \cdots + D^p$.

1. *Montrer que la suite* $(D_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge vers une matrice* $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *que l'on précisera.*
2. *En déduire que la suite* $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Q 19 *Déterminer* $(I_n - A) \times A_p$.

Q 20 *En déduire la limite* L *de la suite* $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Q 21 *Aurait-on pu obtenir la valeur de* L *avec le résultat de la question 18?*

Exercice 1:

R 1 • (|) *est défini sur* $E \times E$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.
• *Pour tout* $(P,Q) \in E^2$, $(P|Q) = (Q|P)$ *par symétrie du produit dans* $\mathbb{R}$, *donc* (|) *est symétrique.*
• *Pour tout* $(P,Q,R) \in E^3$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(\lambda P + Q|R) &= (\lambda P + Q)(1)R(1) + (\lambda P + Q)'(1)R'(1) + (\lambda P + Q)''(1)R''(1) \\ &= (\lambda P + Q)(1)R(1) + (\lambda P' + Q')(1)R'(1) + (\lambda P'' + Q'')(1)R''(1) \\ &= (\lambda P(1) + Q(1))R(1) + (\lambda P'(1) + Q'(1))R'(1) + (\lambda P''(1) + Q''(1))R''(1) \\ &= \lambda(P(1)R(1) + P'(1)R'(1) + P''(1)R''(1)) + Q(1)R(1) + Q'(1)R'(1) + Q''(1)R''(1) \\ &= \lambda\,(P|R) + (Q|R)\,,\end{aligned}$$

donc (|) *est linéaire à gauche.*
• (|) *est linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.*
• *Pour tout* $P \in E$,

$$(P|P) = (P(1))^2 + (P''(1))^2 + (P''(1))^2 \geq 0$$

comme somme de termes positifs et

$$(P|P) = 0 \Leftrightarrow P(1) = P'(1) = P''(1) = 0,$$

car une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chacun des termes est nul.
Par suite, si $(P|P) = 0$, *alors 1 est une racine au moins triple de* P, *qui est un polynôme de degré au plus 2, donc* $P = 0$.
(|) *est donc défini positif.*
(|) *définit donc bien un produit scalaire sur* E.

R 2 $(1, X, X^2)$ *est une base de* E. *Appliquons lui le procédé de Gram-Schmidt.*
• $(1|1) = 1$, *donc on pose* $P_1 = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$.
• *on pose* $Q_2 = X + a$. *On a* $(Q_2|P_1) = (X|P_1) + a\,(P_1|P_1) = (X|1) + a$ *donc* $(Q_2|P_1) = 0 \Leftrightarrow a = -\,(X|1) = -1$, *donc on pose* $Q_2 = X - 1$.
On a alors $(Q_2|Q_2) = 0 + 1 = 1$, *donc on pose* $P_2 = \frac{X-1}{\sqrt{1}} = (X-1)$.
• *on pose* $Q_3 = X^2 + aP_1 + bP_2$. *On a* $(Q_3|P_1) = (X|P_1) + a$ *et* $(Q_3|P_2) = \left(X^2|P_2\right) + b$ *car* (P_1, P_2) *est une famille orthonormée.donc*
$\left\{\begin{array}{l}(Q_3|P_1) = 0 \\ (Q_3|P_2) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}a = -\left(X^2|1\right) = -1 \\ b = -\left(X^2|X-1\right) = -\end{array}\right.$, *donc donc on pose* $Q_3 = X^2 - 2(X-1) - 1 = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$.
On a alors $(Q_3|Q_3) = 0 + 0 + 4$, *donc on pose* $P_3 = \frac{(X-1)^2}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}(X-1)^2$.
• *La famille* $\left(1, X-1, \frac{1}{2}(X-1)^2\right)$ *est alors une base orthonormée de* E *pour le produit scalaire condidéré.*

R 3 • *La famille* $(1, X-1)$ *est une base orthonormée de* $\mathbb{R}_1[X]$.
Le projeté orthogonal de U *sur* $\mathbb{R}_1[X]$ *est donc*

$$V = (U|1)\,1 + (U|X-1)\,(X-1) = -3 + 2(X-1).$$

Par suite, $d(U, \mathbb{R}_1[X]) = d(U,V) = \sqrt{(U-V|U-V)} = \sqrt{(X^2-2X+1|X^2-2X+1)} = \sqrt{(X-1)^2|(X-1)^2} = \sqrt{4} = 2.$
On aurait pu décomposer U *sur la base obtenue à la question précédente sous la forme :*

$$U = \underbrace{2 \times \frac{1}{2}(X-1)^2}_{\in \mathbb{R}_1[X]^\perp} + \underbrace{2(X-1) - 3}_{\in \mathbb{R}_1[X]},$$

et on a alors directement

$$d(U, \mathbb{R}_1[X]) = \left\| 2 \times \frac{1}{2}(X-1)^2 \right\| = 2\left\| \frac{1}{2}(X-1)^2 \right\| = 2.$$

R 4 • *On a* $\varphi\,(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)\,(1) = \lambda P\,(1) + \mu Q(1)$ *donc* φ *est une application linéaire de* E *dans* $\mathbb{R}$ *donc est une forme linéaire.*

R 5 *La forme linéaire* φ *est non nulle car* $\varphi(1) = 1 \neq 0$ *donc* $H = \ker(\varphi)$ *est un hyperplan de* E. *On a donc on a* $\dim H = 3 - 1 = 2$.

R 6 *Soit* $P \in H$. *On a* $(P|1) = P\,(1) \times 1 + P'(1) \times 0 + P''(1) \times 0 = P\,(1) = 0$ *car* $P \in H$ *donc* $1 \in H^\perp$ *donc* $vect\,(1) \subset H^\perp$. *De plus,* $H \oplus H^\perp = E$ *donc* $\dim\,(H) + \dim\left(H^\perp\right) = 3$ *donc* $\dim\left(H^\perp\right) = 3 - 2 = 1 = \dim\,(vect\,(1))$ *donc* $vect\,(1) = H^\perp$.

R 7 *Soit* q *la projection orthogonale sur* $H^\perp = vect\,(1)$. *la famille* (1) *est une base orthonormée de* $H^\perp$ *car 1 est unitaire. On a, pour* $P \in E$, $q\,(P) = (P|1)\,1 = P\,(1)$ *et* $p\,(P) = P - q\,(P) = P - P\,(1)$. *On a donc* $p\,(1) = 0$, $p\,(X) = X - 1$ *et* $p\left(X^2\right) = X^2 - 1$.
donc $mat_{\mathcal{B}}\,(p) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

R 8 *Posons* $Q_i = (X-1)^i$. *On a si* $j \leq i$ *alors* $Q_i^{(j)} = i(i-1)\cdots(i-j+1)(X-1)^{i-j}$ *et si* $j > i$ *alors* $Q_i^{(j)} = 0$. *On a donc* $Q_i^{(j)}(1) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ i! \text{ si } i = j \end{cases}$. *On en déduit que* $(Q_i|Q_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ (i!)^2 \text{ si } i = j \end{cases}$. *La famille* $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ *est donc orthogonale et* $\|Q_i\| = \sqrt{(Q_i|Q_j)} = i!$. *On en déduit que si* $P_i = \dfrac{Q_i}{i!} = \dfrac{(X-1)^i}{i!}$, *la famille* $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ *est une famille orthonormée de* $n+1 = \dim(E)$ *vecteurs donc une BON de* E *et vérifie* $\deg(P_i) = i$.

R 9 *La famille* $(P_0, P_1, \ldots, P_k)$ *est une famille orthonormée (donc libre) de* $k+1$ *vecteurs de* $F = \mathbb{R}_k[X]$ *donc est une base de* F.
La famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ *est une famille orthonormée de* E *donc*
si $j \geq k+1$ *et* $i \leq k$, $(P_j|P_i) = 0$ *et donc* $P \in F^{\perp} \Leftrightarrow \forall i \leq k,\ (P|P_i) = 0$.
Or $(P|P_i) = P^{(i)}(1)$. *On en déduit que* $P \in F^{\perp} \Leftrightarrow \forall i \leq k,\ P^{(i)}(1) = 0 \Leftrightarrow 1$ *est racine de* P *de multiplicité au moins* $k+1 \Leftrightarrow P$ *multiple de* $(X-1)^{k+1}$.

R 10 *Le projeté orthogonal d'un polynôme* P *sur* F *est un polynôme* $R \in F$ *tel qu'il existe* $S \in F^{\perp}$ *tel que* $P = R + S$, *c'est-à-dire, tel qu'il existe* $Q \in \mathbb{R}_{n-k-1}[X]$ *tel que* $P = R + (X-1)^{k+1} Q$. *Or* $\deg(R) \leq k < \deg(X-1)^{k+1}$ *donc* R *est le reste dans la division euclidienne de* P *par* $(X-1)^{k+1}$.

Exercice 2:

R 11 *Soit* $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ *muni du produit scalaire usuel défini par* $(f|g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$. *Si* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, *et pour* $t \in [0,1]$, $f(t) = \sqrt{t}$ *et* $P(t) = at + b$, *alors* $\|f - P\| = \sqrt{(f-P|f-P)} = \sqrt{\int_0^1 \left(\sqrt{t} - at - b\right)^2 dt}$.

R 12 *Lorsque* (a,b) *décrit* $\mathbb{R}^2$, P *décrit le sous-espace vectoriel* F *de* E *des fonctions polynômiale de degré inférieur ou égal à* 1 *donc* $d = \inf_{P \in F} \|f - P\| = d(f, F)$.

R 13 *On a* $F = vect(P_0, P_1)$ *avec* $P_0 : t \mapsto 1$ *et* $P_1 : t \mapsto t$ *donc* $P \in F$ *est le projeté orthogonal de* f *sur* F *si et seulement si* $f - P \in F^{\perp}$ *soit* $\begin{cases} \sqrt{(f-P|P_0)} = 0 \\ \sqrt{(f-P|P_1)} = 0 \end{cases}$.
On a $\sqrt{(f-P|P_0)} = \int_0^1 \left(\sqrt{t} - at - b\right) dt = \frac{2}{3} - b - \frac{1}{2}a$ *et* $\sqrt{(f-P|P_1)} = \int_0^1 \left(\sqrt{t} - at - b\right) t dt = \frac{2}{5} - \frac{1}{2}b - \frac{1}{3}a$
Le système $\begin{cases} \frac{2}{3} = b + \frac{1}{2}a \\ \frac{2}{5} = \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}a \end{cases}$ *admet pour solution* $(a,b) = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{15}\right)$ *donc* $P(t) = \frac{4}{5}t + \frac{4}{15}$.

R 14 *D'après le cours,* $d(f,F) = d(f, p_F(f))$ *où* p_F *est la projection orthogonale sur* f *donc* $d^2 = \int_0^1 \left(\sqrt{t} - \frac{4}{5}t - \frac{4}{15}\right)^2 dt = \frac{1}{450}$ *donc* $d = \frac{1}{\sqrt{450}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{900}} = \frac{\sqrt{2}}{30}$.

Exercice 3:

R 15 *Un réel* λ *est valeur propre de* A *si et seulement si* $\ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$.*c'est-à-dire si* $A - \lambda I_n$ *n'est pas inversible et* $sp(A) \subset]-1,1[$ *donc* $1 \notin sp(A)$ *donc* $A - I_n$ *est inversible.*

R 16 *Soit* f *l'endomorphisme canoniquement associé à* A.
A *est diagonalisable donc* f *est diagonalisable donc il existe une base* $(u_1, \ldots, u_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *formée de vecteurs propres de* f.
Il existe donc $\lambda_i \in sp(A) = sp(f)$ *tel que* $f(e_i) = \lambda_i e_i$ *et donc* $mat_{(u_1,\ldots,u_n)}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = D$.
On a aussi $mat_{(e_1,\ldots,e_n)}(f) = A$ *donc* $D = P^{-1}AP$ *avec* P *matrice de passage de* $(e_1, \ldots, e_n)$ *vers* $(u_1, \ldots, u_n)$.

R 17 *On a* $D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$ *avec* $\lambda_i \in sp(A)$ *donc* $\lambda_i \in]-1,1[$. *On a donc* $\lim_{p \to +\infty} \lambda_i^p = 0$ *et donc* $\lim_{n \to +\infty} D^p = 0$.
Or $A = PDP^{-1}$ *donc* $A^p = PD^pP^{-1}$. *Par continuité du produit matriciel, la suite* $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ *converge vers* $P \times 0 \times P^{-1} = 0$.

R 18 *Pour* $p \in \mathbb{N}$, *on pose* $A_p = I_n + A + \cdots + A^p$ *et* $D_p = I_n + D + \cdots + D^p$.

1. *On a* $D_p = I_n + D + \cdots + D^p = \begin{pmatrix} 1+\lambda_1+\cdots+\lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1+\lambda_n+\cdots+\lambda_n^p \end{pmatrix}$.

   Or la série $\sum x^n$ *converge et a pour somme* $\dfrac{1}{1-x}$ *si* $|x|<1$ *donc* $\lim\limits_{p\to+\infty} 1+\lambda_i+\cdots+\lambda_i^p = \dfrac{1}{1-\lambda_i}$.

   On en déduit que la suite $(D_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge.vers* $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{1-\lambda_n} \end{pmatrix} = \Delta$.

2. *On a* $A^p = PD^pP^{-1}$ *donc* $A_p = PI_nP^{-1} + PDP^{-1} + \cdots + PD^pP^{-1} = P\left(I_n + D + \cdots + D^p\right)P^1 = PD_pP^1$.
   Par continuité du produit matriciel, la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $P\Delta P^{-1}$.

R 19 *On a* $A_p = \sum\limits_{i=0}^{n} A^i$ *donc* $(I_n - A)\times A_p = \sum\limits_{i=0}^{p} A^i - \sum\limits_{i=0}^{p} A^{i+1} = \sum\limits_{i=0}^{p} A^i - \sum\limits_{i=1}^{p+1} A^i = I_n - A^{p+1}$ *(formule de Bernoulli).*

R 20 *On a vu que* $\lim\limits_{p\to+\infty} A^p = 0$ *donc* $\lim\limits_{p\to+\infty} A^{p+1} = 0$. *On déduit de la question précédente que* $\lim\limits_{p\to+\infty} (I_n - A)\times A_p = I_n$.
On a vu que $I_n - A$ *est inversible donc* $A_p = (I_n - A)^{-1} \times ((I_n - A)\times A_p)$ *et par continuité du produit matriciel,* $\lim\limits_{p\to+\infty} A_p = (I_n - A)^{-1} \times I_n = (I_n - A)^{-1}$.

R 21 *On a vu dans la question 18 que* $\lim\limits_{p\to+\infty} A_p = P\Delta P^{-1}$. *Or* $I_n - D = \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}$ *donc* $(I_n - D)\times\Delta = I_n$ *donc* $I_n - D$ *est inversible et* $(I_n - D)^{-1} = \Delta$.
On a $P\Delta P^{-1} = P(I_n - D)^{-1}P^{-1}$. *Montrons que* $P\Delta P^{-1} = (I_n - A)^{-1}$. *On a* $I_n - A = I_n - PDP^{-1} = P(I_n - D)P^{-1}$ *donc* $\left(P\Delta P^{-1}\right)\times(I_n - A) = \left[P(I_n - D)^{-1}P^{-1}\right]\times\left[P(I_n - D)P^{-1}\right] = I_n$ *donc* $\lim\limits_{p\to+\infty} A_p = P\Delta P^{-1} = (I_n - A)^{-1}$