PSI DM 9 (le vendredi 10 décembre 2023)

Problème:

On considère un espace préhilbertien réel E dont le produit scalaire noté $(.|.)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \ldots, u_n$ des éléments de E.

Pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, on pose $g_{i,j} = (u_i \mid u_j)$.

La matrice $(g_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée $\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n)$. Son déterminant est noté $G(u_1, \ldots, u_n)$.

Cas n=2 et n=3

Q 1 *Soit u et v deux vecteurs quelconques de E. Montrer que $G(u,v) \geq 0$. A quelle condition y a-t-il égalité ?*

Q 2 *Soit u, v et w trois vecteurs quelconques de E.*

a *On suppose que w est orthogonal à u et v. Exprimer $G(u,v,w)$ en fonction de $G(u,v)$.*

b *On suppose que w est combinaison linéaire de u et v. Calculer $G(u,v,w)$.*
Indication: écrire w comme CL de u et v dans C_3 et remarquer que C_3 est CL de C_1 et C_2.

c *On suppose que $w = t + n$ avec t combinaison linéaire de u et v, et n orthogonal à u et v.*
Montrer que $G(u,v,w) = G(u,v)\|n\|^2$.
Indication:

Q 3 *Etablir l'équivalence: (u,v,w) est libre $\Leftrightarrow G(u,v,w) \neq 0$.*

Cas n quelconque

Q 4 *On suppose la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ liée. Montrer que $G(u_1, \ldots, u_n) = 0$.*

Q 5 *On suppose la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ libre.*
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de l'espace vectoriel $G = vect(u_1, \ldots, u_n)$.
On note $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$ la matrice de passage de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de G à la base $(u_1, \ldots, u_n)$ de G.
Montrer que $\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n) = (A)^T \times A$. En déduire que $G(u_1, \ldots, u_n) > 0$.

Q 6 *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $k > 0$ et $(v_1, \ldots, v_k)$ une base quelconque de F.*
Soit $x \in E$. on note $d(x,F) = \inf_{y\in F} \|x - y\|$ et on appelle ce réel "distance de x à F.
Etablir que $d(x,F) = \sqrt{\frac{G(v_1,\ldots,v_k,x)}{G(v_1,\ldots,v_k)}}$.

Une première application

On considère $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ (on ne demande pas de justifier qu'il s'agit d'un produit scalaire). On pose $\alpha = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^2 - (at+b)\right)^2 \mathrm{d}t$.

Q 7 *Interpréter d à l'aide de la distance d'un élément de E à un sous-espace vectoriel de E à préciser.*

Q 8 *Calculer le déterminant.* $\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$.

Q 9 *En admettant que* $\begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{2160}$*, donner la valeur de α.*

Généralisation

Soit p un entier naturel non nul et $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p$ des réels.
On suppose $\forall i \in [[1,p]], a_i > 0, b_i \geq 0$ et $\forall (i,j) \in [[1,p]]^2$, $i \neq j \Rightarrow b_i \neq b_j$.

On pose $C_p(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p) \det(M)$ avec $M = \left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{(i,j)\in[[1,p]]^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_p} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_p+b_1} & \frac{1}{a_p+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_p+b_p} \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{R})$.

On note $\Delta_p = \begin{vmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{p} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{p+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{p+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p} & \frac{1}{p+1} & \frac{1}{p+2} & \cdots & \frac{1}{2p-1} \end{vmatrix}$.

Le but de cette partie est de donner une expression de
$u_n = \inf_{(a_0,\ldots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \int_0^1 \left(t^n - (a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0\right)^2 \, \mathrm{d}t$

Q 10 *Montrer que* $u_n = \dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$.

Pour x réel n'appartenant pas à $\{-b_1, \ldots, -b_p\}$, on pose $F(x) = \frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{p-1})}{(x+b_1)\cdots(x+b_p)}$.
Pour $i \in [[1,p]]$, on pose, $P_i = \prod\limits_{1\leq j\leq p, j\neq i} (X+b_j)$ et $P = \prod\limits_{1\leq j\leq p-1} (X - a_j)$

Q 11 *Montrer que la famille* $(P_1, \ldots, P_p)$ *est une base de* $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

Q 12 *Déterminer* $(\lambda_1, \ldots \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ *tel que* $P = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i P_i$.

Q 13 *On note D le déterminant d'ordre p :*

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{p-1}} & F(a_1) \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{p-1}} & F(a_2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_p+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_p+b_{p-1}} & F(a_p) \end{vmatrix}.$$

En calculant D de de deux manières différentes, montrer que

$$F(a_p)\, C_{p-1}(a_1, \ldots, a_{p-1}, b_1, \ldots, b_{p-1}) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{p-1}(a_i + b_p)}{\prod\limits_{i=1}^{p-1}(b_p - b_i)} C_p(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p).$$

Q 14 *En déduire :*

$$C_p(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p) = \frac{\prod\limits_{1\leq i<j\leq p}(a_j - a_i) \prod\limits_{1\leq i<j\leq p}(b_j - b_i)}{\prod\limits_{(i,j)\in[[1,p]]^2}(a_i + b_j)}$$

Q 15 *En déduire l'égalité* $u_n = \dfrac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$.

Q 16 *Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.*

DM 9 correction

On notre $\mathrm{Gram}(u,v)=\begin{pmatrix}(u\mid u) & (u\mid v)\\ (v\mid u) & (v\mid v)\end{pmatrix}$ et $G(u,v)=\det(\mathrm{Gram}(u,v))$

On note $\mathrm{Gram}(u,v,w)=\begin{pmatrix}(u\mid u) & (u\mid v) & (u\mid w)\\ (v\mid u) & (v\mid v) & (v\mid w)\\ (w\mid u) & (w\mid v) & (w\mid w)\end{pmatrix}$ et $G(u,v,w)=\det(\mathrm{Gram}(u,v,w))$.

Problème:

R 1 *$G(u,v)=\|u\|^2\|v\|^2-(u\mid v)^2\geq 0$ en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et Il y a égalité ssi u et v sont colinéaires (cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz).*

R 2 *Si $w\in\{u,v\}^\perp$ alors $G(u,v,w)=\begin{vmatrix}(u\mid u) & (u\mid v) & 0\\ (v\mid u) & (v\mid v) & 0\\ 0 & 0 & (w\mid w)\end{vmatrix}=G(u,v)\|w\|^2$.*

R 3 *Si $w=\lambda u+\mu v$ alors pour tout $x\in E$, $(x\mid w)=\lambda(x\mid u)+\mu(x\mid v)$ donc en notant C_1,C_2,C_3 les colonnes de $\mathrm{Gram}(u,v,w)$ on a $C_3=\lambda C_1+\mu C_2$ donc $G(u,v,w)=0$.*

R 4 *On a $(u\mid w)=(u\mid t)+(u\mid n)=(u\mid t)$ et $(w\mid w)=\|w\|^2=\|t\|^2+\|n\|^2$ (pythgagore) donc $G(u,v,w)=\begin{vmatrix}(u\mid u) & (u\mid v) & (u\mid t)\\ (v\mid u) & (v\mid v) & (v\mid t)\\ (t\mid u) & (t\mid v) & (t\mid t)+\|n\|^2\end{vmatrix}$ et $\begin{pmatrix}(u\mid t)\\ (v\mid t)\\ \|t\|^2+\|n\|^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(u\mid t)\\ (v\mid t)\\ \|t\|^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \|n\|^2\end{pmatrix}$ donc en utilisant la trilinéarité du déterminant d'ordre 3, $G(u,v,w)=\begin{vmatrix}(u\mid u) & (u\mid v) & (u\mid t)\\ (v\mid u) & (v\mid v) & (v\mid t)\\ (t\mid u) & (t\mid v) & (t\mid t)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}(u\mid u) & (u\mid v) & 0\\ (v\mid u) & (v\mid v) & 0\\ (t\mid u) & (t\mid v) & \|n\|^2\end{vmatrix}=$ $G(u,v,t)+\|n\|^2G(u,v)=\|n\|^2G(u,v)$ car $G(u,v,t)=0$ d'après la question précédente.*

R 5 *Si (u,v,w) est libre alors (u,v) est libre et $w\notin\mathrm{Vect}(u,v)$ donc $G(u,v)\neq 0$ et $n\neq 0$ puis $G(u,v,w)=G(u,v)\|n\|^2\neq 0$. Si $G(u,v,w)=0$ alors $G(u,v)=0$ ou $n=0$ donc (u,v) liée ou $w\in\mathrm{Vect}(u,v)$ donc (u,v,w) est liée.*

R 6 *Notons $C_1,\ldots,C_n$ les colonnes de $\mathrm{Gram}\left(u_1,\ldots,u_n\right)$.
Si $\left(u_1,\ldots,u_n\right)$ est liée alors $\exists\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)\neq(0,\ldots,0)$ telle que $\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_nu_n=0_E$ et donc $\forall x\in E$, $\left(x\mid\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_nu_n\right)=0$ donc $\lambda_1\left(x\mid u_1\right)+\cdots+\lambda_n\left(x\mid u_n\right)=0$. En remplacant x par $u_1,\ldots,u_n$ on obteint $\lambda_1C_1+\cdots+\lambda_nC_n=0$ et donc $G\left(u_1,\ldots,u_n\right)=0$.*

R 7 *Posons $A=\left(a_{i,j}\right), A^T=\left(a'_{j,i}\right)$ avec $a'_{j,i}=a_{i,j}$ et $A^T\times A=B=\left(b_{i,j}\right)$
Par définition de la matrice de passage, $u_j=\sum\limits_{k=1}^n a_{k,j}e_k$ donc $\left(u_i\mid u_j\right)=\left(\sum\limits_{k=1}^n a_{k,i}e_k\mid\sum\limits_{k=1}^n a_{k,j}e_k\right)=\sum\limits_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j}$ car $\left(e_1,\ldots,e_p\right)$ est orthonormée.
et $b_{i,j}=\sum\limits_{k=1}^n a'_{i,k}a_{k,j}=\sum\limits_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j}=\left(u_i\mid u_j\right)$ donc $A^T\times A=\mathrm{Gram}\left(u_1,\ldots,u_n\right)$.
On en déduit que $G\left(u_1,\ldots,u_n\right)=\det\left(A^T\times A\right)=\det\left(A^T\right)\times\det(A)=(\det A)^2>0$ car A est inversible.*

R 8 *Le sous-espace F étant de dimension finie, on peut écrire $x=t+n$ avec $t\in F$ et $n\in F^\perp$ où t est le projeté orthogonal de x sur F.
D'après le cours, $d(x,F)=\|x-t\|=\|n\|$.
On a $(v_i|x)=(v_i|t)+(v_i|n)=(v_i|t)$ car $n\in F^\perp$ et $(x|x)=(t|t)+(n|n)$ (pythagore)*

$$G\left(v_1,\dots,v_k,x\right)=\begin{vmatrix}(v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_k) & (v_1|t)\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ (v_k|v_1) & \cdots & (v_k|v_k) & (v_k|t)\\ (t|v_1) & \cdots & (t|v_k) & (t|t)+(n|n)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_k) & (v_1|t)\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ (v_k|v_1) & \cdots & (v_k|v_k) & (v_k|t)\\ (t|v_1) & \cdots & (t|v_k) & (t|t)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}(v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_k)\\ \vdots & & \vdots\\ (v_k|v_1) & \cdots & (v_k|v_k)\\ (t|v_1) & \cdots & (t|v_k)\end{vmatrix}$$

et donc $G\left(v_1,\dots,v_k,x\right)=G\left(v_1,\dots,v_k,t\right)+\|n\|^2\,G\left(v_1,\dots,v_k\right)$ *(en développant par rapport à la dernière colonne).*
Or $\left(v_1,\dots,v_k,t\right)$ *est liée car* $t\in F$ *donc* $G\left(v_1,\dots,v_k,t\right)=0$ *donc* $G\left(v_1,\dots,v_k,x\right)=\|n\|^2\,G\left(v_1,\dots,v_k\right)$.
Or $G\left(v_1,\dots,v_k\right)\neq 0$ *car* $\left(v_1,\dots,v_k\right)$ *est libre donc* $\|n\|^2=\dfrac{G\left(v_1,\dots,v_k,x\right)}{G\left(v_1,\dots,v_k\right)}$
On a vu dans la question précédente que $G\left(u_1,\dots,u_n\right)\geq 0$ *pour toute famille de vecteurs. On peut donc passer à la racine pour toute famille de* $d(x,F)=\|n\|=\sqrt{\frac{G(v_1,\dots,v_k,x)}{G(v_1,\dots,v_k)}}$ *car* $\|n\|\geq 0$.

R 9 *Posons* $P_0=X^2$ *et* $P_{a,b}=aX+b$.
On a $\alpha=\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1\left(P_0-P_{a,b}\right)^2(t)\ \mathrm{d}t=\inf_{P_{a,b}\in vect(1,X)}\left\|P_0-P_{a,b}\right\|^2$ *donc* $\alpha=d\left(P_0,F\right)^2$ *avec* $F=vect\left(1,X\right)$.

R 10 $\begin{vmatrix}\frac{1}{1} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$.

R 11 *On a* $(X^i|X^j)=\int_0^1 t^{i+j}\ \mathrm{d}t=\dfrac{1}{j+1}$ *donc* $G\left(1,X\right)=\begin{vmatrix}\frac{1}{1} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}$ *et* $G\left(1,X,X^2\right)=\begin{vmatrix}\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{vmatrix}=\frac{1}{2160}$ *donc*
$\alpha=\dfrac{G\left(1,X,X^2\right)}{G\left(1,X\right)}=\frac{12}{2160}=\frac{1}{180}$.

R 12 *Comme dans la partie précédente, on peut écrire*
$u_n=d\left(X^n,\mathbb{R}_{n-1}[X]\right)^2=\frac{G(1,X,\dots,X^n)}{G(1,X,\dots,X^{n-1})}=\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$.

R 13 *La famille* $\left(P_1,\dots,P_p\right)$ *est une famille de* $p=\dim\left(\mathbb{R}_{p-1}\left[X\right]\right)$ *éléments. Il suffit donc de montrer qu'elle est libre. Supposons* $\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i P_i=0$. *En évaluant en* $-b_i$, *on obtient* $\lambda_i=0$. *Donc* $\left(P_1,\dots,P_p\right)$ *est libre donc base de* $\mathbb{R}_{p-1}\left[X\right]$.

R 14 *Il existe donc* $(\lambda_1,\dots\lambda_p)\in\mathbb{R}^p$ *tel que* $P=\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i P_i$.
En évaluant en $-b_i$, *on obtient* $P_i=\prod\limits_{1\leq j\leq p,j\neq i}\left(X+b_j\right)$ *et* $P\left(-b_i\right)=\prod\limits_{1\leq j\leq p-1}\left(-b_i-a_j\right)=\lambda_i\prod\limits_{1\leq j\leq p,j\neq i}\left(b_j-b_i\right)$.
On en déduit que $\lambda_i=\dfrac{\prod\limits_{1\leq j\leq p-1}\left(a_j+b_i\right)}{\prod\limits_{1\leq j\leq p,j\neq i}\left(b_i-b_j\right)}$.

R 15 *D'une part,* $F\left(a_1\right)=\cdots=F\left(a_{p-1}\right)=0$ *donc en développant suivant* C_p:
$D=F\left(a_p\right)C_{p-1}\left(a_1,\dots,a_{p-1},b_1,\dots,b_{p-1}\right)$.

D'autre part, $x\notin\left\{-b_1,\dots,-b_p\right\}$ *alors* $F\left(x\right)=\dfrac{P\left(x\right)}{\prod\limits_{i=1}^{p}\left(x+b_i\right)}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i P_i\left(x\right)}{\prod\limits_{i=1}^{p}\left(x+b_i\right)}=\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i\dfrac{1}{x+b_i}$. $D=\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{p-1}}\\ \frac{1}{a_2+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{p-1}}\\ \vdots & & \\ \frac{1}{a_p+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_p+b_{p-1}}\end{vmatrix}$

$$\left|\begin{matrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{p-1}} & \lambda_p \dfrac{1}{(a_1+b_p)} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{p-1}} & \lambda_p \dfrac{1}{(a_2+b_p)} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_p+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_p+b_{p-1}} & \lambda_p \dfrac{1}{a_p+b_p} \end{matrix}\right| \; (C_p \leftarrow C_p - (\lambda_1 C_1 + \cdots + \lambda_{p-1} C_{p-1}))$$

donc $D = \lambda_p C_p (a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p) = \dfrac{\displaystyle\prod_{1 \le j \le p-1} (a_j + b_p)}{\displaystyle\prod_{1 \le j \le p, j \ne p} (b_p - b_j)} \times C_p (a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p)$.

d'où $F(a_p) C_{p-1} (a_1, \ldots, a_{p-1}, b_1, \ldots, b_{p-1}) = \dfrac{\displaystyle\prod_{1 \le j \le p-1} (a_j + b_p)}{\displaystyle\prod_{1 \le j \le p-1} (b_p - b_j)} \times C_p (a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p)$

R 16 *Raisonnons par récurrence sur* $p \ge 1$.
Pour $p = 1$: $C_1 (a_1, b_1) = \frac{1}{a_1+b_1}$ *ce qui correspond à la formule proposée (sachant qu'un produit sur le vide vaut 1.)*
Supposons la propriété établie au rang $p - 1 \ge 1$.
Au rang p : $C_p (a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p) = \frac{\prod_{i=1}^{p-1} (b_p - b_i)}{\prod_{i=1}^{p-1} (a_i + b_p)} F(a_p) C_{p-1} (a_1, \ldots, a_{p-1}, b_1, \ldots, b_{p-1})$ *avec*

$F(a_p) = \frac{\prod_{i=1}^{p-1} (a_p - a_i)}{\prod_{i=1}^{p-1} (a_p + b_i)}$ *et par HR :* $C_{p-1} (a_1, \ldots, a_{p-1}, b_1, \ldots, b_{p-1}) = \frac{\prod_{1 \le i < j \le p-1} (a_j - a_i) \prod_{1 \le i < j \le p-1} (b_j - b_i)}{\prod_{(i,j) \in [[1,p-1]]^2} (a_i + b_j)}$ *donc*

$C_p (a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p) = \frac{\prod_{1 \le i < j \le p} (a_j - a_i) \prod_{1 \le i < j \le p} (b_j - b_i)}{\prod_{(i,j) \in [[1,p]]^2} (a_i + b_j)}$. *Ce qui achève la récurrence.*

R 17 *Pour* $a_i = i$ *et* $b_i = i - 1$, $\Delta_p = C_p (a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p)$ *donc* $\Delta_p = \frac{\prod_{1 \le i < j \le p} (j-i)^2}{\prod_{(i,j) \in [[1,p]]^2} (i+j-1)}$.*donc* $u_n = \dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} =$

$\frac{\prod_{i=1}^{n} (n+1-i)^2}{\left(\prod_{i=1}^{n} (i+n)\right)\left(\prod_{i=1}^{n} (n+j)\right)(2n+1)} = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}$.

R 18 $0 \le u_n \le \frac{1 \times \cdots \times n}{(n+1) \times \cdots \times (2n)} \frac{1 \times \cdots \times n}{(n+1) \times \cdots \times (2n)} \frac{1}{2n+1} \le \frac{1}{2n+1} \to 0$ *donc* $u_n \to 0$, *ce qui ne répond pas à la question! (appliquer la formule de Stirling pour répondre à cette question)*