Exercice 1:

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose que $A^3 + A^2 + A + I_p = 0$.

Q 1 La matrice A est-elle inversible?

Q 2 Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Q 3 Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ si et seulement si $A = -I_p$.

Q 4 Justifier que $\forall k \in \mathbb{N}$, $X^4 - 1$ est polynôme annulateur de A .

En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque, une expression de A^n comme combinaison linéaire de I_n, A et A^2 .

Q 5 On suppose que $\text{tr}(A) = 0$.

1. Donner la valeur de $\det(A)$. Montrer que p est pair.
2. Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \text{tr}(A^n) x^n$.

Problème: Exemples de réduction dans le cas où le spectre est vide

Attention 1 On n'utilisera pas sans démonstration la proposition 35 du chapitre sur les polynômes d'endomorphisme qui est hors programme.

Si on rencontre une situation où cela paraît utile, plutôt que de redémontrer la propriété en général, on essaiera de s'adapter à la situation de l'exercice.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}, A'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A'_2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Préliminaire.

Q 6 Montrer que A'_1 et A'_2 sont semblables.

Première partie: passage par les complexes

Q 7 Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A . (on trouve $X^4 + 20X^2 + 64$).

Donner la décomposition en irréductibles de χ_A dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$. Préciser le spectre de A .

Q 8 En déduire que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

Q 9 Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe non réelle de M et X un vecteur propre de M associé à λ .

1. Montrer que $\bar{X}$ est vecteur propre de M et préciser la valeur propre associée.
2. On pose $Y = \frac{1}{2}(X + \bar{X})$, $Z = \frac{1}{2i}(X - \bar{X})$.
Montrer que Y et Z sont éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et exprimer X et $\bar{X}$ comme combinaison linéaire de Y et Z .
3. Montrer que $AY = \text{Re}(\lambda)Y - \text{Im}(\lambda)Z$ et exprimer de même AZ en fonction de λ , Y et Z .

Q 10 Justifier qu'il existe V_1 et V_2 dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ tels que $(V_1, \bar{V}_1, V_2, \bar{V}_2)$ soit une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de A .

(on ne demande pas de calculer V_1 et V_2). Donner une matrice $D \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ diagonale semblable à A .

$$\text{On pose } U_1 = \frac{1}{2}(V_1 + \bar{V}_1), U_2 = \frac{1}{2i}(V_1 - \bar{V}_1), U_3 = \frac{1}{2}(V_2 + \bar{V}_2) \text{ et } U_4 = \frac{1}{2i}(V_2 - \bar{V}_2).$$

Q 11 Montrer que (U_1, U_2, U_3, U_4) est une famille libre dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Q 12 En déduire que A est semblable à A'_1 .

Deuxième partie: utilisation d'un polynôme annulateur

Soit f canoniquement associée à A . On note $E = \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et b_0 la base canonique de E .

Q 13 En utilisant la première question, justifier que $(A^2 + 16I_2)(A^2 + 4I_2) = 0$.

Q 14 Montrer que $\ker(f^2 + 16id_E) \cap \ker(f^2 + 4id_E) = \{0_E\}$.

Q 15 Calculer A^2 . En déduire la dimension de $\ker(f^2 + 16id_E)$ et de $\ker(f^2 + 4id_E)$.

Q 16 Montrer que $E = \ker(f^2 + 16id_E) \oplus \ker(f^2 + 4id_E)$.

Q 17 Montrer que $\ker(f^2 + 4id_E)$ est stable par f et que si $v_1 \in \ker(f^2 + 4id_E)$ alors $(v_1, f(v_1))$ est une base de $\ker(f^2 + 4id_E)$.

Q 18 En déduire que A est semblable à A'_2 . (on utilisera uniquement la question précédente et non la partie précédente).

Troisième partie: Etude d'un cas en dimension finie quelconque

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f un endomorphisme de E .

On suppose que $f^2 + id_E = 0$.

Q 19 Montrer que $sp(f) = \emptyset$.

Q 20 Justifier par un calcul simple que n est pair.

On pose $n = 2p$

Q 21 Soit $e_1 \in E$ un vecteur non nul. Montrer que $F_1 = \text{vect}(e_1, f(e_1))$ est un sous-espace stable par f de dimension 2. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f peut-être définie par blocs sous forme $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{n-2,2} & B \end{array} \right)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{2,n-2}(\mathbb{R})$.

Q 22 Soit F un sous-espace stable par u et $e \in E$.

Montrer que si e n'appartient pas à F alors la somme $F \oplus \text{vect}(e, f(e))$ est directe.

Q 23 Montrer, en utilisant une démonstration par récurrence finie, qu'il existe une famille $(e_1, \dots, e_p)$ de E telle que $(e_1, \dots, e_p, f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une base de E .

Q 24 En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} A & 0_{2,2} & \cdots & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & \cdots & 0_{2,2} & A \end{pmatrix}$.

Exercice 2: (facultatif) (oral des mines)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On suppose que les coefficients de A sont entiers et qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel $A^p = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

Exercice 1:

R 1 On a $A^3 + A^2 + A + I_p = 0$. donc $A(A^2 + A + I_p) = -I_p$ donc A est inversible d'inverse $-(A^2 + A + I_p)$.

R 2 On pose $P = 1 + X + X^2 + X^3 = (X + 1)(X^2 + 1) = (X + 1)(X + i)(X - i)$. On a $P(A) = 0$.

- P est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $\text{sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{-1, i, -i\}$ ensemble des racines complexes de P .

R 3 - D'après ce qui précède, $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1\}$ donc Si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in GL_p(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}AP = -I_p$ donc $A = -I_p$.

R 4 On a $(X - 1)(1 + X + X^2 + X^3) = X^4 - 1$ donc $A^4 - I_p = (A - I_p)(A^3 + A^2 + A + I_p) = 0$ donc $A^4 = I_p$ donc $\forall k \in \mathbb{N}$,

- $A^{4k} = (A^4)^k = (I_p)^k = I_p$.

- $A^{4k} = (A^4)^k = (I_p)^k = I_p$.

$$\begin{aligned} A^{4k} &= (A^4)^k = (I_p)^k = I_p. & A^{4k+2} &= A^{4k} \times A^2 = A^2. \\ A^{4k+1} &= A^{4k} \times A = A. & A^{4k+3} &= A^{4k} \times A^3 = A^3 = -A^2 - A - I_p \end{aligned}$$

R 5 On suppose que $\text{tr}(A) = 0$

1. D'après la deuxième question, A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice de la forme $\text{diag} \left(\underbrace{-1, \dots, -1}_{m_1 \text{ fois}}, \underbrace{i, \dots, i}_{m_i \text{ fois}}, \underbrace{-i, \dots, -i}_{m_{-i} \text{ fois}} \right)$

et donc $\text{tr}(A) = \text{tr}(D) = (-1)m_{-1} + i(m_i - m_{-i})$. Or $\text{tr}(A) \in \mathbb{R}$ car A est une matrice réelle donc $m_i - m_{-i} = 0$ donc $\text{tr}(A) = -m_{-1} \in \mathbb{Z}_-$. Supposons que $\text{tr}(A) = 0$. On a alors $m_{-1} = 0$, $m_i = m_{-i}$ et $m_{-1} + m_i - m_{-i} = p$ donc $p = 2m_i$ est

pair et A est semblable à $D = \text{diag} \left(\underbrace{i, \dots, i}_{m_i \text{ fois}}, \underbrace{-i, \dots, -i}_{m_i \text{ fois}} \right)$ donc $\det(A) = \det(D) = i^{m_i} (-i)^{m_i} = (-i^2)^{m_i} = 1$.

2. Les matrices A^n et D^n sont semblables donc $\text{tr}(A^n) = \det(D^n) = m_i(i^n + (-i)^n) = (1 + (-1)^n)m_i i^n$. Si n est impair, alors $\text{tr}(A^n) = 0$ et si n est pair, $n = 2k$, alors $\text{tr}(A^n) = 2m_i \times i^{2k} = (-1)^k 2m_i$. On s'intéresse donc à la série entière

$\sum (-1)^k 2m_i x^{2k} = 2m_i \sum (-x^2)^k$ qui est une série géométrique de raison $(-x^2)$ qui converge si et seulement si $|-x^2| < 1$ c-a-d $|x| < 1$. On a de plus $\sum_{n=0}^{+\infty} \text{tr}(A^n) x^n = \frac{p}{2} \frac{1}{1+x^2}$.

Problème:**Préliminaire.**

R 6 Soit u canoniquement associée à A'_1 et (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

On vérifie que $A'_2 = \text{mat}_{(e_1, -2e_2, e_3, -2e_4)}(u)$ donc A'_1 et A'_2 sont semblables.

Première partie: passage par les complexes

R 7 Comme indiqué dans l'énoncé, on trouve $\chi_A = X^4 + 20X^2 + 64$.

R 8 En calculant les racines de $X^2 + 20X + 64$, on trouve que $X^2 + 20X + 64 = (X + 16)(X + 4)$

donc $X^4 + 20X^2 + 64 = (X^2 + 16)(X^2 + 4) = (X^2 - (4i)^2)(X^2 - (2i)^2) = (X - 4i)(X + 4i)(X - 2i)(X + 2i)$.

On en déduit que $\text{sp}(A) = \{4i, -4i, 2i, -2i\}$.

Dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, la matrice A admet 4 valeurs propres distinctes donc est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

R 9 $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe non réelle de M et X un vecteur propre de M associé à λ .

1. On a $M\bar{X} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ avec $y_i = \sum_{j=1}^n m_{i,j} \times \bar{x}_j$ $\underset{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}{=} \sum_{j=1}^n \overline{m_{i,j}} \times \bar{x}_j = \overline{\sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j}$ donc $M\bar{X} = \overline{MX} = \overline{\lambda X} = \bar{\lambda} \bar{X}$.

Donc $\bar{X}$ est vecteur propre de M associé à $\bar{\lambda}$.

$$2. Y = \frac{1}{2}(X + \bar{X}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1 + \bar{x}_1) \\ \vdots \\ \frac{1}{2}(x_n + \bar{x}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(x_1) \\ \vdots \\ \operatorname{Re}(x_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

$$\text{De même, } Z = \frac{1}{2i}(X - \bar{X}) = \begin{pmatrix} \operatorname{Im}(x_1) \\ \vdots \\ \operatorname{Im}(x_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

On en déduit que $X = Y + iZ$ et $\bar{X} = Y - iZ$.

$$3. \text{ On a } MY = M \left(\frac{1}{2}(X + \bar{X}) \right) = \frac{1}{2}(MX + M\bar{X}) = \frac{1}{2}(\lambda X + \bar{\lambda}\bar{X}) = \frac{1}{2}(\lambda(Y + iZ) + \bar{\lambda}(Y - iZ))$$

$$MY = \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2}Y + i\frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2}Z = \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2}Y - \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2i}Z = \operatorname{Re}(\lambda)Y - \operatorname{Im}(\lambda)Z.$$

$$\text{On a de même } MZ = M \left(\frac{1}{2i}(X - \bar{X}) \right) = \frac{1}{2i}(MX - M\bar{X}) = \frac{1}{2i}(\lambda X - \bar{\lambda}\bar{X}) = \frac{1}{2i}(\lambda(Y + iZ) - \bar{\lambda}(Y - iZ))$$

$$MZ = \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2i}Y + \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2}Z = \operatorname{Im}(\lambda)Y + \operatorname{Re}(\lambda)Z.$$

R 10 Soit $V_1 \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A associé à $2i$ et $V_2 \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A associé à $4i$ dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$. D'après la question précédente, $\bar{V}_1$ est vecteur propre de A associé à $-2i$ et $\bar{V}_2$ est vecteur propre de A associé à $-4i$ donc $(V_1, \bar{V}_1, V_2, \bar{V}_2)$ est libre donc base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$.

R 11 D'après la question 9, $V_1 = U_1 + iU_2$, $V_2 = U_1 - iU_2$, $V_1 = U_3 + iU_4$, $V_4 = U_3 - iU_4$.

Tout $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ est combinaison linéaire de $(V_1, \bar{V}_1, V_2, \bar{V}_2)$ donc de (U_1, U_2, U_3, U_4) .

On en déduit que (U_1, U_2, U_3, U_4) est génératrice (donc base pour des raisons de dimension) de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$.

On en déduit que (U_1, U_2, U_3, U_4) est libre dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ donc $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ (immédiat d'après la définition d'une famille libre).

R 12 D'après la question 9, avec $\lambda = 2i$,

$AU_1 = \operatorname{Re}(\lambda)U_1 - \operatorname{Im}(\lambda)U_2 = -2U_2$ et $AU_2 = \operatorname{Im}(\lambda)U_1 + \operatorname{Re}(\lambda)U_2 = 2U_1$. En procédant de même pour $\lambda = 4i$, on obtient que, si f est canoniquement associée à A , alors $\operatorname{mat}_{(U_1, U_2, U_3, U_4)}(f) = A'_1$. donc A et A'_1 sont semblables.

Deuxième partie: utilisation d'un polynôme annulateur

R 13 Le théorème de Cayley Hamilton donne $\chi_A(A) = 0$ et $\chi_A = X^4 + 20X^2 + 64 = (X^2 + 16)(X^2 + 4)$ donc $(A^2 + 16I_2)(A^2 + 4I_2) = 0$.

R 14 Si $x \in \ker(f^2 + 16id_E) \cap \ker(f^2 + 4id_E)$, alors $u^2(x) = -16x$ et $u^2(x) = -4x$. donc $x = 0_E$.

On en déduit que $\ker(f^2 + 16id_E) \cap \ker(f^2 + 4id_E) = \{0_E\}$.

R 15 La somme $\ker(f^2 + 4id_E) + \ker(f^2 + 16id_E)$ est directe d'après la question précédente.

On a $(f^2 + 16id_E) \circ (f^2 + 4id_E) = 0$ donc $\operatorname{Im}(f^2 + 4id_E) \subset \ker(f^2 + 16id_E)$.

Par le théorème du rang, $4 - \dim(\ker(f^2 + 4id_E)) \leq \dim(\ker(f^2 + 16id_E))$ donc

$$4 \geq \dim(\ker(f^2 + 4id_E) \oplus \ker(f^2 + 16id_E)) = \dim(\ker(f^2 + 4id_E)) + \dim(\ker(f^2 + 16id_E)) \geq 4$$

donc $\dim(\ker(f^2 + 4id_E) \oplus \ker(f^2 + 16id_E)) = 4$.

Or $\dim(\ker(f^2 + 4id_E) \oplus \ker(f^2 + 16id_E)) = \dim(\ker(f^2 + 4id_E)) + \dim(\ker(f^2 + 16id_E))$ car la somme est directe d'après ce qui précède donc $E = \ker(f^2 + 16id_E) \oplus \ker(f^2 + 4id_E)$.

$$\mathbf{R 16} \quad A^2 = \begin{pmatrix} -10 & 6 & -6 & 6 \\ 6 & -10 & -6 & 6 \\ -6 & 6 & -10 & 6 \\ -6 & 6 & 6 & -10 \end{pmatrix} \text{ donc } A^2 + 16I_4 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -6 & 6 \\ 6 & 6 & -6 & 6 \\ -6 & 6 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \text{ qui est de rang 2 donc (th du rang)}$$

on a $\dim(\ker(f^2 + 16id_E)) = 2$.

En utilisant la relation aux dimensions des supplémentaires, on obtient $\dim(\ker(f^2 + 4id_E)) = 2$.

R 17 Soit $v_1 \in \ker(f^2 + 4id_E)$ un vecteur non nul.

On a $(f^2 + 4id_E)(f(v_1)) = (f^2 + 4id_E) \circ f(v_1) = f \circ (f^2 + 4id_E)(v_1) = f(0_E) = 0_E$ donc $f(v_1) \in \ker(f^2 + 4id_E)$ donc $\ker(f^2 + 4id_E)$ est stable par f .

La famille $(v_1, f(v_1))$ est libre car f n'admet pas de valeurs propres donc est une base de $\ker(f^2 + 4id_E)$.

R 18 Soit $v_1 \in \ker(f^2 + 4id_E)$ un vecteur non nul. Posons $v_2 = f(v_1)$. On a $f(v_2) = f^2(v_1) = -4v_1$.

De même, soit $v_3 \in \ker(f^2 + 16id_E)$ un vecteur non nul. Posons $v_4 = f(v_3)$. On a $f(v_4) = f^2(v_3) = -16v_3$.

D'après la question précédente, la famille (v_1, v_2) est une base de $\ker(f^2 + 4id_E)$ et de même la famille (v_3, v_4) est une base de $\ker(f^2 + 16id_E)$.

Or $\ker(f^2 + 4id_E)$ et $\ker(f^2 + 16id_E)$ sont supplémentaires donc (v_1, v_2, v_3, v_4) et $\operatorname{mat}_{(v_1, v_2, v_3, v_4)}(f) = A'_2$ donc A est semblable à A'_2 .

Troisième partie: Etude d'un cas en dimension finie quelconque

R 19 On a $f^2 + id_E = 0$ donc $X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de f qui n'admet pas de racine réelle donc $sp(f) = \emptyset$.

R 20 On a $f^2 = -id_E$ donc $\det(f^2) = \det(-id_E) = (-1)^n$ et $\det(f^2) = \det(f)^2 \geq 0$ donc n est pair. (on peut aussi raisonner sur la multiplicité des racines complexes de χ_f).

R 21 D'une part $sp(f) = \emptyset$ donc $(e_1, f(e_1))$ est libre car e_1 n'est pas vecteur propre donc F est de dimension 2.

On a $\begin{cases} f(e_1) \in F \\ f^2(e_1) = -e_1 \in F \end{cases}$ donc F est stable par f n pôle $n = 2p$.

En complétant la famille libre $(e_1, f(e_1))$ en une base b de E , on a $mat_b(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0_{n-2,2} & B \end{array} \right)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B \in \mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{2,n-2}(\mathbb{R})$.

R 22 Soit $x \in F$ et $y \in \text{vect}(e, f(e))$ tels que $x+y = 0$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $y = ae + bf(e)$. On a, $\begin{cases} x + ae + bf(e) = 0 : (L_1) \\ f(x) + af(e) - be = 0 : (L_2) \end{cases}$. ((L₂) obtenu de (L₁) en appliquant f des deux côtés de l'égalité). On en déduit la combinaison $a(L_1) - b(L_2)$ que $ax - bf(x) + (a^2 + b^2)e = 0$ soit $(a^2 + b^2)e = -ax + bf(x) \in F$ car $x \in F$ et F stable par f . Or $e \notin F$ donc $a^2 + b^2 = 0$ donc $a = b = 0$ donc $y = 0$ donc $x = 0$ donc la somme $F + \text{vect}(e, f(e))$ est directe.

R 23 Montrons par récurrence finie que pour tout $k \in [[1, p]]$, il existe une famille $(e_1, \dots, e_p)$ de E telle que $(e_1, \dots, e_p, f(e_1), \dots, f(e_p))$ est libre.

Initialisation: Déjà vu dans une question précédente.

Soit $k \in [[1, p-1]]$. On suppose qu'il existe une famille $(e_1, \dots, e_k)$ de E telle que $(e_1, \dots, e_k, f(e_1), \dots, f(e_k))$ est libre.

Posons $F = \text{vect}(e_1, \dots, e_k, f(e_1), \dots, f(e_k))$. On vérifie comme précédemment que F est stable en utilisant $f^2 = -id_E$ et d'après la question précédente, comme $\dim(F) = 2k < 2p = n$, il existe $e_{k+1} \notin F$ donc tel que la somme $F + \text{vect}(e_{k+1}, f(e_{k+1}))$ est directe. On en déduit que la juxtaposition des base $(e_1, \dots, e_k, f(e_1), \dots, f(e_k), e_{k+1}, f(e_{k+1}))$ est une base de cette somme directe donc est libre. La modification de l'ordre ne change pas la liberté donc $(e_1, \dots, e_{k+1}, f(e_1), \dots, f(e_{k+1}))$.

Le résultat est donc vrai pour $k = p$.

La famille $(e_1, \dots, e_p, f(e_1), \dots, f(e_p))$ est donc libre avec $n = 2p$ éléments donc base de E .

R 24 Dans cette base, la matrice de u est diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} A & 0_{2,2} & \cdots & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{2,2} \\ 0_{2,2} & \cdots & 0_{2,2} & A \end{pmatrix}$.

Exercice 2:

Par hypothèse $X^p - 1$ est polynôme annulateur de A . Or $X^p - 1$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ à racines simples de racines les éléments de $\mathbb{U}_p = \{\omega_k, k \in [[0, n-1]]\}$ avec $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ donc

- A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

- $sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{U}_p$.

Or $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ donc si $\lambda \in sp(A)$ alors $\bar{\lambda} \in sp_{\mathbb{C}}(A)$.

On en déduit que $sp(A)$, qui est non vide et de cardinal inférieur ou égal à 2 est l'un des ensembles suivants $\{1\}$, $\{-1\}$, $\{-1, 1\}$, $\{\omega_k, \bar{\omega}_k\}$ avec ω_k racine $p^{\text{ième}}$ non réelle de 1.

Si $sp_{\mathbb{C}}(A)$ est l'un des ensembles $\{1\}$, $\{-1\}$, $\{-1, 1\}$ alors A est semblable à une des matrice D parmi les matrices $I_2, -I_2, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Si $sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\omega_k, \bar{\omega}_k\}$ avec ω_k racine $p^{\text{ième}}$ non réelle de 1, alors $tr(A) = \omega_k + \bar{\omega}_k = 2\text{Re}(\omega_k)$ et $tr(A) \in \mathbb{Z}$ car A est à coefficient entier.

Or $|\text{Re}(\omega_k)| < 1$ car $|\omega_k| = 1$ et ω_k n'est pas réelle donc $2\text{Re}(\omega_k) \in [[-1, 1]]$

A est semblable à une des matrice D parmi les matrices, $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{-2\pi}{3}} \end{pmatrix}$.

On a dans l'ordre des matrices D introduites, $D = I_2, D^2 = I_2, D^2 = I_2, D^4 = I_2, D^6 = I_2, D^3 = I_2$.

On en déduit que $D^{12} = I_2$ donc $A^{12} = I_2$.