PSI DS 3 (le 16 novembre 2022, 3h)

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet comporte 5 pages

Les calculatrices sont interdites

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Questions indépendantes: Début du sujet 1

Q 1 *Soit E un espace euclidien. Soit (u_0, u_1, u_2) une famille de E telle que $\forall (i,j) \in [[0,2]]^2$, $(u_i|u_j) = 2^{i+j}$. Calculer $\|3u_0 + u_1 - u_2\|$.*

Q 2 *On considère $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.*
Soit $a = (1,2,1)$ et H le sous espace vectoriel de E défini par $(x_1, x_2, x_3) \in H \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$.

1. *Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale p sur $F = vect(a)$.*
2. *En déduire la matrice, dans la base canonique, de la symétrie orthogonale s par rapport à H.*

Exercice 1: Début du sujet 2

On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Q 3 *Justifier que 0 est valeur propre de J. Déterminer la dimesion du sous-espace propre associé.*

Q 4 *Montrer que J est diagonalisable.*

Q 5 *Déterminer $P \in GL_4(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tels que $P^{-1}JP = D$ et D est diagonale.*

Soit (u_n), (v_n), (w_n) et (x_n) des suites réelles vérifiant,

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{5}(2u_n + v_n + w_n + x_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 2v_n + w_n + x_n) \\ w_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + v_n + 2w_n + x_n) \\ x_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + v_n + w_n + 2x_n) \end{cases}$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Q 6 *Déterminer une matrice* $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, *une expression de* X_n *en fonction de* A, n *et* X_0.

Q 7 *Exprimer* A *à l'aide de* J *et* I_4. *En déduire que* A *est diagonalisable et préciser une base* $B = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ *de* $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ *formée de vecteurs propres de* A.

Q 8 *Déterminer des suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
$X_n = a_nV_1 + b_nV_2 + c_nV_3 + d_nV_4$.

Q 9 *En déduire que la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

On note $L \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ la limite de la suite (X_n) et $F = vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Q 10 *Montrer que* L *est le projeté orthogonal de* X_0 *sur* F.

Problème: début du sujet 3

Dans tout le problème, on considère un entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pourra noter, pour $k \in [[0, n]]$, $F_k = \mathbb{R}_k[X]$.

Partie I - Produit scalaire sur E

I.1 - Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

Q 11 *Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$ est convergente.*

Q 12 *En déduire que pour tout $R \in \mathbb{R}_n[X]$, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} R(t)e^{-t}dt$ est convergente.*

Q 13 *Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{c} E \times E \to \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto (P|Q) \end{array} \right.$ est un produit scalaire de E.*

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

Q 14 *Soit $k \in [[1, n]]$. Etablir que :*

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}dt.$$

Q 15 *En déduire la valeur de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$.*

Q 16 *En déduire la valeur de $(X^i|X^j)$ pour tout $(i, j) \in [[0, n]]^2$.*

I.3 - Calcul de $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sqrt{\int_0^{+\infty} \left(t^2 - at - b\right)^2 e^{-t}dt}$

Dans cette partie, on suppose que $n = 2$. On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \mathbb{R}_1[X] = vect\,(1, X)$ et, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $P = aX + b$.

Q 17 *Pour quelle valeur de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, le polynôme P vérifie-t-il le système d'équations suivant?*

$$\left\{ \begin{array}{l} (\ X^2 - P \mid 1) = 0 \\ (\ X^2 - P \mid X) = 0 \end{array} \right.$$

Q 18 *En déduire le projeté orthogonal de X^2 sur F.*

Q 19 *Déterminer le réel $m = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sqrt{\int_0^{+\infty} \left(t^2 - at - b\right)^2 e^{-t}dt}$.*

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

II.1 - Propriétés de l'application α

Q 20 *Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.*

Q 21 *Ecrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.*

Q 22 *En déduire que α est diagonalisable; préciser les valeurs propres de α et la dimension des sous-espaces propres.*

II.Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

Q 23 *Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant*

$$\alpha(P_k) = -kP_k.$$

Q 24 *Justifier que P_k est de degré k.*

Q 25 *Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.*

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

Q 26 *Montrer que $(\alpha(P)|Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)\, e^{-t} dt$.*

Q 27 *En déduire que $(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q))$.*

Q 28 *En déduire que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.*

Partie III - Racines du polynôme P_k.

Dans cette partie, $k \in [[1, n]]$.

Q 29 *En utilisant l'égalité $(P_0 \mid P_k) = 0$, Montrer que P_k admet au moins une racine appartenant à $]0, \infty[$.*

Q 30 *Justifier que P_k est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.*

Q 31 *Soit l le nombre de racines de P_k dont l'ordre de multiplicité est impair.*
- Si $l \neq 0$, on note $x_1, \dots, x_l$ les racines de P_k dont l'ordre de multiplicité est impair et on pose $Q_k = \prod_{i=1}^{l} (X - x_i)$.
- Si $k = 0$, on pose $Q_n = 1$.
En utilisant la question précédente, montrer que $l = k$.

Partie IV - Méthode de quadrature de Gauss

On admet (voir partie précédente) que le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes que l'on note $x_1, \ldots, x_n$. On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (*)$$

Q 32 *Montrer qu'un n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

Q 33 *En déduire qu'il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$.*

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $(*)$.

Q 34 *Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.*
Montrer que $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i)$. (On pourra utiliser la question 30 et la division euclidienne par P_n).

Q 35 *Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que*

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

Partie V - Une famille de polynômes

Pour tout $k \in [[0, n]]$, on note $h_k : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto (-1)^k x^k e^{-x} \end{array} \right. \in E$.

Soit $k \in [[0, n]]$.

Q 36 *Justifier que h_k est de classe C^∞ et qu'il existe un unique polynôme L_k vérifiant:*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h_k^{(k)}(x) = L_k(x)\, e^{-x}$$

Préciser le degré et le coefficient dominant de L_k.

Q 37 *Calculer L_0, L_1, L_2.*

Q 38 *Montrer que pour tout $l \in [[0, k-1]]$, $h_k^{(l)}(0) = 0$.*

Q 39 *Démontrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, pour tout $p \in [[0, k]]$*

$$(L_k \mid P) = (-1)^p \int_0^{+\infty} h_k^{(k-p)}(t) P^{(p)}(t)dt$$

Q 40 *En déduire que si $k \in [[1, n]]$, alors $L_k \in (F_{k-1})^\perp$. En déduire que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une famille orthogonale*

Q 41 *Montrer que $\forall k \in [[0, n]]$, $L_k = P_k$.*

Q 42 *Déterminer, pour $k \in [[0, n]]$, la valeur de $\|P_k\|$.*

Questions indépendantes:

R 1 *On a* $\|3u_0 + u_1 - u_2\|^2 = \|3u_0\|^2 + \|u_1\|^2 + \|-u_2\|^2 + 2(3u_0|u_1) + 2(3u_0|-u_2) + 2(u_1|-u_2)$
$= 9\|u_0\|^2 + \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + 6(u_0|u_1) - 6(u_0|u_2) - 2(u_1|u_2) = 9 + 4 + 16 + 6\times 2 - 6\times 4 - 2\times 8 = 1.$

R 2 *1: Pour tout* $x \in E$, $p(x) = \dfrac{(x|a)}{\|a\|^2}a$ *donc* $p(e_i) = \dfrac{(e_i|a)}{\|a\|^2}a$ *et* $(e_1|a) = 1$, $(e_2|a) = 2$ *et* $(e_3|a) = 1$ *et* $\|a\|^2 = 6$.

On en déduit que On en déduit que $mat_B(p) = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

2: Soit $x \in E$. *On a* $x \in H \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow (x|a) = 0$ *donc* $H = vect(a)^{\perp}$ *et donc* $H^{\perp} = \left(vect(a)^{\perp}\right)^{\perp} = vect(a)$*.car* $vect(a)$ *est de dimension finie.*
La symétrie orthogonale par rapport à H *est la symétrie par rapport à* H *parallèmement à* $vect(a) = F$.
Soit q *la projection orthogonale sur* H.
On a $s = q - p$ *et* $p + q = id_E$ *donc* $s = id_E - 2q$.
On a donc $mat_B(s) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 1:

R 3 *On a* $rg(J) = 1$ *donc, par le théorème du rang,* $\ker(J)$ *est de dimension* 3 *donc* 0 *est valeur propre de* J *et* $\dim(E_0(J)) = 3$

R 4 *Si* $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *on a* $JV_1 = 4V_1$ *donc* V_1 *est vecteur propre associé à la valeur propre* 4 *et* $\dim(E_4(J)) \geq 1$.
On a donc $\dim(E_0(J)) + \dim(E_4(J)) \geq 4$ *donc* J *est diagonalisable,* $sp(J) = \{0, 4\}$ *et* $\dim(E_4(J)) = 1$.

R 5 *Déterminons* $E_0(J) = \ker(J)$.
Soit f *l'application linéaire canoniquement à* J *et* $b_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ *la base canonique de* $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$*..*
On a $C_1 = C_2$ *donc* $f(e_1 - e_2) = 0$. *De même* $f(e_1 - e_3) = f(e_1 - e_4) = 0$
Pour $i \in [[2, 4]]$, *posons* $V_i = e_1 - e_i$.
la famille (V_2, V_3, V_4) *est une famille échelonnée, donc libre, de* 3 *vecteurs de* $\ker(f)$ *qui est de dimension* 3 *donc* (V_2, V_3, V_4) *est une base de* $\ker(f)$ *et* (V_1) *est une base de* $E_4(J)$ *et donc* $b = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ *est une base de* $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ *car* $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) = E_4(J) \oplus E_0(J)$.
Soit $P = P_{b_0 \to b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. *On a* $P^{-1}JP = mat_b(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$.

R 6 *On pose* $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *On a bien* $X_{n+1} = AX_n$. *On a*
$X_n = AX_{n-1} = A(AX_{n-2}) = A^2X_{n-2}$ *et par récurrence immédiate,* $X_n = A^nX_0$.

R 7 *On a* $J+I_4=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$ *donc* $A=\dfrac{1}{5}(J+I_4)$.

Si V *est vecteur propre de* J *associé à* λ, *alors* $AJ=\dfrac{1}{5}(J+I_4)V=\dfrac{1}{5}(JV+V)=\dfrac{\lambda+1}{5}V$.
On en déduit que (V_1,V_2,V_3,V_4) *est une base de* $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ *formée de vecteurs de* A *associés respectivement aux valeurs propres* $1,\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{5}$.

R 8 *On peut décomposer* X_0 *dans la base* (V_1,V_2,V_3,V_4): $X_0=\alpha V_1+\beta V_2+\gamma V_3+\varepsilon V_4$.
On a $X_n=A^nX_0=A^n(\alpha V_1+\beta V_2+\gamma V_3+\varepsilon V_4)=\alpha A^nV_1+\beta A^nV_2+\gamma A^nV_3+\varepsilon A^nV_4$.
Or $AV_1=V_1$ *donc* $\forall n\in\mathbb{N}$, A^nV_1 *et pour* $i\geq 2$, $AV_i=\dfrac{1}{5}V_i$ *donc* $A^nV_i=\dfrac{1}{5^n}V_i$.
On en déduit que $X_n=\alpha V_1+\beta\left(\dfrac{1}{5}\right)^nV_2+\gamma\left(\dfrac{1}{5}\right)^nV_3+\varepsilon\left(\dfrac{1}{5}\right)^nV_4$.

R 9 *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n=0$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^nV_i=0_{4,1}$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}X_n=\alpha V_1=L$.

On note $L\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ la limite de la suite (X_n) et $F=vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

R 10 *On a* $X_0=\alpha V_1+\beta V_2+\gamma V_3+\varepsilon V_4$ *et, par hypothèse,* $V_1\in F$.
De plus $V_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ *donc* $(V_1|V_2)=1-1+0+0=0$ *donc* $V_2\in F^\perp$. *De même,* $V_3\in F^\perp$ *et* $V_3\in F^\perp$ *donc* $\beta V_2+\gamma V_3+\varepsilon V_4\in F^\perp$ *donc* $L=\alpha V_1\in F$ *est le projeté orthogonal de* X_0 *sur* F

I Problème:

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

R 11 *La fonction* $t\mapsto t^ke^{-t}$ *est continue sur* $[0,+\infty[$.
De plus, $\dfrac{t^ke^{-t}}{\dfrac{1}{t^2}}=t^{k+2}e^{-t}\to_{t\to+\infty}0$ *par croissances comparées donc* $t^ke^{-t}=o_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
Or $\dfrac{1}{t^2}>0$ *sur* $[1,+\infty[$ *et* $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^2}dt$ *est convergente donc* $\int_1^{+\infty}t^ke^{-t}dt$ *converge donc* $\int_0^{+\infty}t^ke^{-t}dt$ *converge.*

R 12 • $t\mapsto R(t)e^{-t}$ *est continue sur* $[0,+\infty[$.
• *Si* R *est un polynôme non nul de degré* $p\in\mathbb{N}$ *et* a_p *est son coefficient dominant,* $R(t)\sim_{t\to+\infty}a_pt^p$ *donc* $R(t)e^{-t}\sim_{t\to+\infty}a_pt^pe^{-t}$ *et* $t\mapsto t^pe^{-t}\geq 0$ *et* $\int_0^{+\infty}t^pe^{-t}dt$ *converge.*
par comparaison, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty}R(t)e^{-t}dt$ *converge.*

R 13 • *D'après la question précédente , pour tout '*$(P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2$, $(P|Q)$ *existe et est un réel.*
• *Pour tout* $(P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2$,

$$(P|Q)=\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}Q(t)P(t)e^{-t}dt=(Q|P),$$

donc (.|.) est symétrique.
- *Pour tout $(P,Q,R) \in (\mathbb{R}_n[X])^3$, pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\begin{aligned}(\lambda P + \mu Q|R) &= \int_0^{+\infty} (\lambda P(t) + \mu Q(t))R(t)e^{-t}dt \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t}dt + \mu \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t}dt \quad \textit{(par linéarité de l'intégrale convergente)} \\ &= \lambda(P|R) + (Q|R),\end{aligned}$$

donc (.|.) est linéaire à gauche.
- *(.|.) est linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.*
- *Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $P^2(t)e^{-t} \geq 0$.*

D'où, par positivité de l'intégrale (qui converge et "$+\infty > 0$"), on a :

$$(P|P) = \int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt \geq 0.$$

(.|.) est donc positif.
- *Enfin, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, si $(P|P) = 0$, alors $\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt = 0$.*

Or $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, "$0 < +\infty$" et $\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt$ converge, donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $P^2(t)e^{-t} = 0$, et donc $P^2(t) = 0$, puis $P(t) = 0$.
Le polynôme P a donc une infinité de racines (tous les éléments de $\mathbb{R}_+$), donc $P = 0$.
(.|.) est donc bien défini.
- *(.|.) définit donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.*

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

R 14 *On pose $u(t) = t^k$ et $v(t) = -e^{-t}$ Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et $u'(t) = kt^{k-1}$ et $v'(t) = e^{-t}$.*
Comme $u(t)v(t) = -t^k e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ par croissances comparées et $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$ est convergente d'après la première question.
On peut donc intégrer par parties:

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = [-t^k e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} kt^{k-1}e^{-t}dt = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}dt$$

R 15 *Posons $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$. On a $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ et $\int_0^{x} e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x} \to_{x\to+\infty} 1$ donc $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$*
D'après la question précédente, $I_k = kI_{k-1} = k\,(k-1)\,I_{k-2} = k\,(k-1)\,(k-2)\,I_{k-3} = \cdots = k\,(k-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \times I_0 = k!$.

R 16 *On a $(X^i|X^k) = \int_0^{+\infty} t^{i+j}e^{-t}dt = (i+j)!$*

I.0.1 I.3 - Calcul de $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sqrt{\int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t}dt}$

Dans cette partie, on suppose que $n = 2$. On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \mathbb{R}_1[X] = vect\,(1, X)$ et, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $P = aX + b$.

R 17 *On a $(\ X^2 - P \mid 1) = (\ X^2 - aX - b \mid 1) = (X^2 \mid 1) - a\,(\ X \mid 1) - b\,(1 \mid 1) = 2! - a \times 1! - b \times 0! = 2 - a - b$.et $(\ X^2 - P \mid 1) = (\ X^2 - aX - b \mid X) = (X^2 \mid X) - a\,(\ X \mid X) - b\,(1 \mid X) = 3! - a \times 2! - b \times 1! = 6 - 2a - b$.*
On a donc $\begin{cases} (\ X^2 - P \mid 1) = 0 \\ (\ X^2 - P \mid X) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow (a,b) = (4,-2)$.

R 18 *Posons* $P_0 = 4X - 2 \in vect\,(1, X)$. *On a* $\begin{cases} (\ X^2 - P_0 \mid 1) = 0 \\ (\ X^2 - P_0 \mid X) = 0 \end{cases}$ *donc* $X^2 - P_0 \in vect\,(1, X)^{\perp}$ *donc* $X^2 = P_0 + (X^2 - P_0)$ *avec* $P_0 \in F$ *et* $X^2 - P_0 \in F^{\perp}$ *donc* P_0 *est le projeté orthogonal de* X^2 *sur* F.

R 19 *Si* $P = aX + b$ *alors* $\sqrt{\int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2\, e^{-t} dt} = \sqrt{(X^2 - P|X^2 - P)} = \|X^2 - P\|$.
On a donc $m = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sqrt{\int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2\, e^{-t} dt} = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|X^2 - P\| = \inf_{P\in F} \|X^2 - P\| = d\,(X^2, F)$.
D'après le cours, $d\,(X^2, F) = \|X^2 - P_0\| = \|X^2 - 4X + 2\|$.
Or $\|X^2 - 4X + 2\|^2 = \|X^2\|^2 + 16\,\|X\|^2 + 4\,\|1\|^2 - 8\,(X^2 \mid X) + 4\,(X^2 \mid 1) - 16\,(X \mid 1) = 4! + 16 \times 2! + 4 \times 0! - 8 \times 3! + 4 \times 2! - 16 \times 1! = 4$.
On en déduit que $m = 2$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

II.1 - Propriétés de l'application α

R 20 • *Pour tout* $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'$ *est un polynôme.*
De plus, comme $\deg(P') \leq \deg(P) - 1 \leq n - 1$ *et* $\deg(P'') \leq n - 2$, *on a*

$$\deg(\alpha(P)) \leq \max(\deg(XP''), \deg((1 - X)P')) \leq \max(1 + n - 2, 1 + n - 1) \leq n,$$

donc $\alpha(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. *On a donc* $\alpha : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$.
• *De plus, pour tout* $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda P + Q) &= X(\lambda P + Q)'' + (1 - X)(\lambda P + Q)' \\ &= X(\lambda P'' + Q'') + (1 - X)(\lambda P' + Q') \quad \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\ &= \lambda XP'' + XQ'' + \lambda(1 - X)P' + (1 - X)Q' = \lambda(XP'' + (1 - X)P') + (XQ'' + (1 - X)Q') \\ &= \lambda\alpha(P) + \alpha(Q), \end{aligned}$$

donc α *est une application linéaire.*
• α *est donc bien un endomorphisme de* $\mathbb{R}_n[X]$.

R 21 *On a* $\alpha(1) = X \times 0 + (1 - X) \times 0 = 0$, $\alpha(X) = X \times 0 + (1 - X) \times 1 = 1 - X$ *et, pour tout* $k \in [\![2, n]\!]$,

$$\alpha(X^k) = X\,(k\,(k - 1))\,X^{k-2} + (1 - X)kX^{k-1} = -kX^k + k^2X^{k-1}.$$

On a donc

$$Mat_{(1,X,\ldots,X^n)}(\alpha) = Mat_{(1,\ldots,X^n)}(\alpha(1), \ldots, \alpha(X^n)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -(n-1) & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}.$$

R 22 *Posons* $M = Mat_{(1,X,\ldots,X^n)}(\alpha)$.
On a $\chi_\alpha(x) = \det\left(x\ id_{\mathbb{R}_n[X]} - \alpha\right) = \det(xI_{n+1} - M)$. *La matrice* $xI_{n+1} - M$ *est triangulaire supérieure et son déterminant est le produit de ses coefficients diagoonaux.*
On a donc $\chi_\alpha(x) = \prod_{i=0}^{n} (x + i)$. *On en déduit que*

$$sp(\alpha) = sp\,(M)) = [[-n, 0]].$$

L'endomorphisme α *admet* $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ *valeurs propres distinctes donc est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension* 1.
(Comme α *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_n[X]$ *ayant* $n + 1$ *valeurs propres, toutes ces valeurs propres sont simples.* $-k$ *est donc valeur propre simple de* α, *donc* $1 \leq \dim E_{-k}(\alpha) = \dim(\ker(\alpha + k\ id_{\mathbb{R}_n[X]})) \leq m\,(-k) = 1$*).*

II.Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

R 23 • *On a $\alpha(P_k) = -kP_k \Leftrightarrow P_k \in E_{-k}(\alpha)$.*
Or $E_{-k}(\alpha)$ est de dimension 1. Soit Q_k un élément non nul de $E_{-k}(\alpha)$.
On a donc $\alpha(P_k) = -kP_k \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P_k = \lambda Q_k$.
Soit a le coefficient dominant de Q_k. Le coefficient dominant de λQ_k et λa qui vaut 1 si et seulement si $\lambda = \frac{1}{a}$.
Il existe donc bien un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

R 24 *Première méthode; Soit $d \in [[0, n]]$ le dégré de P_k.*
$\exists(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tels que $P_k = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ (et $a_d = 1$).
Alors on a :

$$\begin{aligned}\alpha(P_k) &= \sum_{i=0}^{d} a_i \alpha(X^i) \quad \textit{(par linéarité de } \alpha\textit{)} \\ &= 0 + \sum_{i=1}^{d} a_i \left(-iX^i + i^2 X^{i-1}\right) \quad \textit{(d'après la question 21)}\end{aligned}$$

Le coefficient dominant de $\alpha(P_k)$ est donc $-da_d = -d$.
Comme on a par ailleurs $\alpha(P_k) = -kP_k$ qui est de coefficient dominant $-ka_d = -k$, on déduit que $k = d$.donc P_k est de degré k.
Deuxième méthode: Soit $d \in [[0, n]]$. et notons α_d l'endomorphisme induit par α sur $\mathbb{R}_d[X]$.

La matrice M_d de α_d dans la base $(1, X, \ldots, X^d)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -(d-1) & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -d \end{pmatrix}$ *donc $sp(\alpha_d) = sp(M_d)) = [[-d, 0]]$.*
On en déduit que $-k \in sp(\alpha_k)$ et $-k \notin sp(\alpha_{k-1})$. Il existe donc un polynôme $R_k \in \mathbb{R}_k[X] \backslash \mathbb{R}_{k-1}[X]$ tel que $\alpha(R_k) = -kR_k$
Comme $E_{-k}(\alpha)$ est de dimension 1, P_k est multiple (non nul) de R_k donc de degré k.

R 25 • *On a $\alpha(1) = 0 = -0(1)$ et le coefficient dominant de 1 est 1, donc, par unicité de P_0, on a $P_0 = 1$.*
• *On a $\alpha(X) = -X + 1$, donc $\alpha(X-1) = \alpha(X) - \alpha(1) = -X + 1 + 0 = -(X-1)$, et le coefficient dominant de $X - 1$ est 1, donc, par unicité de P_1, on a $P_1 = X - 1$.*
• *Le coefficient dominant de $X^2 - 4X + 2$ est 1 et*

$$\alpha(X^2-4X+2) = \alpha(X^2) - 4\alpha(X) + 2\alpha(1) = -2X^2 + 4X - 4(-X+1) + 0 = -2X^2 + 8X - 4 = -2(X^2 - 4X + 2),$$

donc, par unicité de P_2, on a $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

R 26 • *Par linéarité de l'intégrale convergente,*

$$\begin{aligned}(\alpha(P)|Q) &= \int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1-t)P'(t))\, Q(t)\, e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} (tP''(t) + P'(t)\, Q(t)\, e^{-t} dt - \int_0^{+\infty} tP'(t)\, Q(t)\, e^{-t} dt,\end{aligned}$$

où toutes ces intégrales convergent d'après la question 12.
• *Posons* $u'(t) = tP''(t) + P'(t)$, $u(t) = tP'(t)$, $v(t) = Q(t)e^{-t}$, $v'(t) = Q'(t)\,e^{-t} - Q(t)e^{-t}$.
u *et* v *sont de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+$.
$u(t)v(t) = tP'(t)Q(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *par croissances comparées.*
Enfin, toutes les intégrales convergent (toujours d'après la question 12).
On peut donc intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}(tP''(t)+P'(t)\,Q(t)\,e^{-t}dt &= [u(t)\,v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tP'(t)(Q'(t)\,e^{-t} - Q(t)e^{-t})dt \\ &= 0 - 0 - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)\,e^{-t}dt + \int_0^{+\infty} tP'(t)\,Q(t)e^{-t}dt,\end{aligned}$$

donc

$$(\alpha(P)|Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt$$

R 27 *Par symétrie des rôles de* P *et* Q, *on a aussi*

$$(\alpha(Q)|P) = -\int_0^{+\infty} tQ'(t)P'(t)e^{-t}dt = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt,$$

donc, par symétrie du produit scalaire,

$$(\alpha(P)|Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'^{-t}dt = (\alpha(Q)|P) = (P|\alpha(Q)).$$

R 28 • *Pour tout* $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}(\alpha(P_i)|P_j) &= (-iP_i|P_j) = -i(P_i|P_j) \\ (P_i|\alpha(P_j)) &= (P_i|-jP_j) = -j(P_i|P_j),\end{aligned}$$

donc, d'après la question 27, $-i(P_i|P_j) = -j(P_i|P_j)$, *donc* $(i-j)(P_i|P_j) = 0$, *donc, si* $i \neq j$, *on a* $(P_i|P_j) = 0$.
La famille $(P_0, \ldots, P_n)$ *est donc orthogonale.*
• *De plus, elle est composée de vecteurs non nuls (car le coefficient dominant de ces polynômes vaut 1), donc cette famille est libre.*
Comme elle est libre et composée de $n+1$ *polynômes de* $\mathbb{R}_n[X]$, *espace vectoriel de dimension* $n+1$, *c'est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.
• *La famille* $(P_0, \ldots, P_n)$ *est donc bien une base orthogonale de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III - Racines du polynôme P_k.

Dans cette partie, $k \in [[1,n]]$.

R 29 *D'après la question précédente,* $k \neq 0$ *donc* $(P_0 \mid P_k) = 0$ *et* $P_0 = 1$ *donc* $\int_0^{+\infty} P_k(t)\,e^{-t}dt = 0$.
• *Supposons que* $\forall t \in [0,+\infty[$, $P_k(t) \geq 0$ *alors* $\forall t \in [0,+\infty[$, $P_k(t)\,e^{-t} \geq 0$ *et* $\int_0^{+\infty} P_k(t)\,e^{-t}dt = 0$. *La fonction* $t \mapsto P_k(t)\,e^{-t}$ *est continue donc* $\forall t \in [0,+\infty[$, $P_k(t)\,e^{-t} = 0$ *ce qui n'est pas possible car* P_k *est un polynôme non nul donc admet un nombre fini de racines et* $\forall t$, $e^{-t} \neq 0$ *donc* $\exists b \in [0,+\infty[$, $P_k(b) < 0$.
• *De même,* $\exists a \in [0,+\infty[$, $P_k(a) < 0$.
• *la fonction* P_k *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc d'après le TVI,* $\exists x \in]a,b[$ *(ou* $]b,a[$*) tel que* $P_k(x) = 0$ *et on a bien* $x > 0$.

R 30 *La famille* $(P_0, \ldots, P_k)$ *est une famille orthogonale donc* $\forall i \in [[0,k-1]]$, $(P_k|P_i) = 0$.
Or $\deg(P_i) = i$ *donc* $(P_0, \ldots, P_{k-1})$ *est une famille de* k *polynômes de degré échelonnés de* $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ *donc est une base de* $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ *donc* $P_k \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^\perp$.

R 31 *Supposons $l < k$. On a alors $\deg(Q_k) < k$ donc $Q_k \in F_{k-1}$ donc, d'après la question précédente, $(P_k|Q_k) = 0$.*
Or, en écrivant la décomposition en irréductibles de P_k (qui est de coefficient dominant 1) et en isolant les racines d'ordre impair qui appartiennent à $]0,+\infty[$, on a une égalité de la forme $P_k = \prod\limits_{i=1}^{l}(X-x_i)^{a_i} \times R$ avec α_i impair et R est produit de polynômes de degré 2 ne s'annulant pas, de facteurs $(X-y)^{\beta}$ avec $y \notin]0,+\infty[$ ou β pair. On en déduit que $\forall t \in [0,+\infty[$, $Q_k(t)P_k(t) = \prod\limits_{i=1}^{l}(X-x_i)^{a_i+1} \times R(t) \geq 0$ car $\alpha_i + 1 \geq 0$. Or $(P_k|Q_k) = 0$ donc $\int_0^{+\infty} Q_k(t)P_k(t)e^{-t}dt = 0$. En raisonnant comme dans la première question de cette partie, on déduit que Q_kP_k change de signe sur $]0,+\infty[$. On en déduit que $l = k$.

Partie IV - Méthode de quadrature de Gauss

R 32 *Remarquons déjà que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = (1|X^k) = k!$ d'après la question 16.*
$\boxed{\Rightarrow}$ *Si un n-uplet $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ vérifie $(*)$, alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, en posant $P(X) = X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on doit avoir*

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^k, \quad ie \quad k! = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^k.$$

Le n-uplet $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie donc bien :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ *Réciproquement, si n-uplet $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix},$$

alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la ligne k de ce système donne $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^k = k! = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$.
D'où, pour tout polynôme $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{n} \lambda_i a_k x_i^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k t^k e^{-t}dt \quad \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt. \end{aligned}$$

On a donc bien $(*)$.

R 33 *La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est une matrice de Van der Monde, donc inversible car les x_i sont deux à deux distincts.*

Le système $M\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0!\\1!\\\vdots\\(n-1)!\end{pmatrix}$ *est donc équivalent à* $\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}0!\\1!\\\vdots\\(n-1)!\end{pmatrix}$ *donc il admet un unique solution. D'où l'unicité de* $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ *vérifiant* $(*)$.

R 34 *Soit* $P\in\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. *Par division euclidienne par* P_n, *il existe* $(Q,R)\in\mathbb{R}[X]$ *tels que* $P=P_nQ+R$ *et* $\deg(R)<\deg(P_n)=n$.
On a $\sum\limits_{i=1}^n\lambda_iP(x_i)=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_iP_n(x_i)Q(x_i)+R(x_i)=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_iR(x_i)=\int_0^{+\infty}R(t)e^{-t}dt$ *car* $\deg(R)<n$ *et d'autre part,*
$\int_0^{+\infty}P(t)e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}(P_nQ+R)(t)e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}P_n(t)Q(t)e^{-t}+\int_0^{+\infty}R(t)e^{-t}dt=(P_n|Q)+\int_0^{+\infty}R(t)e^{-t}dt$.
Or $\deg(P)\leq 2n-1$ *et* $\deg(R)<n$ *donc* $\deg(P_nQ)\leq 2n-1$ *donc* $\deg(Q)\leq n-1$ *donc* $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]=\mathrm{vect}(P_0,\dots,P_{n-1})$ *(car* $(P_0,\dots,P_{n-1})$ *est une famille orthonormée donc libre de n éléments de* $\mathbb{R}_{n-1}[X]$*).*
On en déduit que $\int_0^{+\infty}P(t)e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}R(t)e^{-t}dt=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_iP(x_i)$.

R 35 • *Soit* $P=P_n^2$. *Alors* $\deg(P)=2\deg(P_n)=2n$, *donc* $P\in\mathbb{R}_{2n}[X]$.
• *De plus,* $t\mapsto P(t)e^{-t}=P_n^2(t)e^{-t}$ *est continue, positive et non nulle sur* $\mathbb{R}_+^*$ *(car* P_n, *non nul, n'a pas une infinité de racines), donc, par stricte positivité de l'intégrale ("*$0<+\infty$*"),* $\int_0^{+\infty}P(t)e^{-t}dt>0$.
• *Enfin, comme* x_i *est racine de* P_n *pour tout* $i\in[\![1,n]\!]$, x_i *est aussi racine de* $P=P_n^2$, *donc* $\sum\limits_{i=1}^n\lambda_iP(x_i)=\sum\limits_{i=1}^n0=0$, *donc on a bien*

$$\int_0^{+\infty}P(t)e^{-t}dt\neq 0=\sum_{i=1}^n\lambda_iP(x_i).$$

Partie V - Une famille de polynômes

R 36 *La fonction* h_k *est de classe* C^∞ *(th opérations) et d'après la formule de Leibniz, en considérant* $u(x)=e^{-x}$ *et* $v(x)=x^k$. *On a* $u^{(i)}(x)=(-1)^ie^{-x}$ *et* $v^{(j)}(x)=k\times(k-1)\times\cdots\times(k-j+1)x^{k-j}$ *donc*
$\forall x\in\mathbb{R},\ h_k^{(k)}(x)=(-1)^k\sum\limits_{i=0}^k\binom{k}{i}(-1)^ie^{-x}\times k(k-1)\cdots(i+1)x^i=e^{-x}\left((-1)^k\sum\limits_{i=0}^k(-1)^i\binom{k}{i}e^{-x}\times\dfrac{k!}{i!}x^i\right)=L_k(x)e^{-x}$ *avec* $L_k=\sum\limits_{i=0}^k(-1)^{k+i}\binom{k}{i}\dfrac{k!}{i!}X^i$. *Le dégré de* L_k *est* k *et son coefficient dominant est* $(-1)^{2k}\binom{k}{k}\dfrac{k!}{k!}=1$.

R 37 *On vérifie que* $L_0=1$, $L_1=X-1$ *et* $L_2=X^2-4X+2$.

R 38 *La formule de Leibniz donne,* $h_k^{(l)}(x)=(-1)^k\sum\limits_{i=0}^l\binom{l}{i}k(k-1)\cdots(k-i+1)x^{k-i}\times(-1)^{l-i}e^{-x}$ *(j'ai inversé les rôles de* u *et* v *par rapport au précédent calcul). Si* $l\leq k-1$ *et* $i\in[[0,l]]$, $k-i\geq1$ *donc* $x\mapsto x^{k-i}$ *s'annule en* 0.
On en déduit que $h_k^{(l)}(0)=0$.

R 39 *Montrons par récurrence finie sur* $p\in[[0,k]]$ *que* $(L_k\mid P)=(-1)^p\int_0^{+\infty}h_k^{(k-p)}(t)P^{(p)}(t)dt$.
Par définition, On a $(L_k\mid P)=\int_0^{+\infty}L_k(t)P(t)e^{-t}dt=\int_0^{+\infty}h_k^{(k)}(t)P(t)dt$ *donc la propriété est vraie pour* $k=0$.
Supposons que, pour un certain $p\in[[0,k-1]]$, $(L_k\mid P)=(-1)^p\int_0^{+\infty}h_k^{(k-p)}(t)P^{(p)}(t)dt$ *(et donc que cette intégrale converge).*
On intègre par parties (sous réserve d'existence du " [] "):

$$\int_0^{+\infty}h_k^{(k-p)}(t)P^{(p)}(t)dt=\left[h_k^{(k-p-1)}(t)P^{(p)}(t)\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}h_k^{(k-p-1)}(t)P^{(p+1)}(t)dt.$$

D'après la question précédente, $h_k^{(k-p-1)}(0) = 0$ *car* $k - p - 1 < k$*, en reprenant le déveoppement par la formule de Leibniz précédent,* $h_k^{(p)}(x) \sim_{x \to +\infty} (-1)^{k+p} x^k \times e^{-x}$ *donc*
$h_k^{(p)}(x) P^{(p)}(t) \to_{x \to +\infty} 0$ *(par croissance comparée en prenant un équivalent de* $P^{(p)}$ *en* $+\infty$*).*
L'intégrale à gauche du signe égal converge donc celle à droite aussi et

$$\int_0^{+\infty} h_k^{(k-p)}(t) P^{(p)}(t) dt = -\int_0^{+\infty} h_k^{(k-p-1)}(t) P^{(p+1)}(t) dt.$$

On en déduit que $(L_k \mid P) = (-1)^{p+1} \int_0^{+\infty} h_k^{(k-(p+1))}(t) P^{(p+1)}(t) dt$*, ce qui achève la récurrence.*

R 40 *En prenant* $p = k$ *dans le résultat précédent,* $(L_k \mid P) = (-1)^k \int_0^{+\infty} h_k(t) P^{(k)}(t) dt$*. Si* $P \in F_{k-1}$*, alors* $\deg(P) \leq k-1$ *donc* $P^{(k)} = 0$ *donc* $(L_k \mid P) = 0$ *donc* $L_k \in (F_{k-1})^{\perp}$*.*
Montrons que $(L_0, \ldots, L_n)$ *est une famille orthogonale Si* $0 \leq i < k \leq n$*, on a* $L_i \in F_i \subset F_{k-1}$ *donc d'après la question précédente,* $(L_k \mid L_i) = 0$ *donc la famille* $(L_0, \ldots, L_n)$ *est orthogonale.*

R 41 *On a* $L_0 = 1 = P_0$*,* $L_1 = X - 1 = P_1$ *et* $L_2 = X^2 - 4X + 2 = P_2$*.*
.Soit $k \leq n-1$*. Supposons que* $\forall i \in [[0, k]]$*,* $L_i = P_i$*. Montrons que* $L_{k+1} = P_{k+1}$*.*
ATTENTION: On fait un raisonnement dans l'espace F_{k+1}*:*
Le sous-espace F_k *est un hyperplan de* F_{k+1} *dont une base est* $(L_0, \ldots, L_k)$*.*
L'orthogonal de F_k ***considéré comme sous espace de*** F_{k+1} *est donc une droite vectorielle (de* F_{k+1}*) à laquelle appartiennent* P_{k+1} *et* L_{k+1} *donc* P_{k+1} *et* L_{k+1} *sont colinéaires. Or* P_{k+1} *et* L_{k+1} *ont même coefficient dominant (égal à* 1*) donc* $P_{k+1} = L_{k+1}$*, ce qui achève la récurrence.*

R 42 $(L_k \mid L_k) = (-1)^k \int_0^{+\infty} h_k(t) L^{(k)}(t) dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} h_k(t) \times k! dt = (-1)^{2k} k! \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = (k!)^2$ *donc* $\|L_k\| = k!$.