DM 10 (pour le 9 décembre 2024)

Exercice 1:

Pour tout réel θ, on pose $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Q 1 *Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Calculer $S_\theta \times S_{\theta'}$. La multiplication est-elle commutative dans $O_2(\mathbb{R})$?*

Q 2 *Soit E un espace eulidien de dimension 2. Montrer que toute isométrie de E est une réfléxion ou la composée de deux réflexions.*

Q 3 *Justifier que $S_\theta \times S_{\theta'} = S_{\theta+\alpha} \times S_{\theta'+\alpha}$.*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $\theta_1, \ldots, \theta_k$ des réels. On pose $M = S_{\theta_1} \times S_{\theta_2} \times \cdots \times S_{\theta_k}$.

Q 4 *On suppose que k est pair. Déterminer M.*

Q 5 *On suppose que k est impair. Déterminer M.*

Problème:

Dans ce problème, E est un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire que l'on notera $<|>$ de norme associée $\|.\|$

- Un endomorphisme u de E est une similitude (vectorielle) de E lorsqu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout vecteur x de E, $\|u(x)\| = k\|x\|$. On dit alors que u est la similitude de rapport k .
- Un endomorphisme u de E conserve l'orthogonalité si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2$, $(< x \mid y >= 0 \Rightarrow \ < u(x) \mid u(y) >= 0)$
- On notera $\mathrm{Sim}(E)$, l'ensemble des similitudes de E, $\mathrm{O}(E)$ désigne l'ensemble des isométries vectorielles de E .
  L'objectif de ce problème est de caractériser les similitudes d'un espace euclidien.

(La deuxième partie est dans une très large mesure indépendante de la première partie).

Généralités

Q 6 *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme dont la matrice est A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel.*
Montrer que u est une similitude u dont on précisera le rapport.

Q 7 *Montrer que toute similitude de E est un automorphisme de E.*

Q 8 *Montrer que la composée de deux similitudes est une similitude et que la réciproque d'une similitude est une similitude.*

Q 9 *Soit $k > 0$, $u \in \mathcal{L}(E)$, B une base orthonormée de E et M la matrice de u dans B.*
Montrer que u est une similitude de rapport k si et seulement si $\frac{1}{k}u$ est une isométrie vectorielle.
En déduire que u est une similitude de rapport k si et seulement si $M^T \times M = k^2 I_n$.

Q 10 *Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'une similitude u dont on donnera le rapport.*
Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la similitude u^{-1}.

Q 11 *Soit u un endomorphisme de E. Démontrer que u est une similitude de E si et seulement si les images des vecteurs unitaires de E ont même norme et que la valeur commune de ces normes est non nulle.*

Q 12 *Soit $k > 0$. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que u est une similitude de E de rapport k si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2, < u(x) \mid u(y) >= k^2 < x \mid y >$.*

Q 13 *En déduire que, si u est une similitude de E alors u conserve l'orthogonalité.*

Q 14 *Réciproquement, on suppose que u est un endomorphisme non nul de E conservant l'orthogonalité. Soit x et y deux vecteurs de E unitaires.*
Donner la valeur de $\langle x + y \mid x - y \rangle$. En déduire que u est une similitude.

Q 15 *Soit u une application bijective de E dans E (non supposée linéaire) telle qu'il existe un réel $k > 0$ pour lequel:*

$$\forall (x, y) \in E^2, < u(x) \mid u(y) >= k^2 < x \mid y >$$

Démontrer que u est un endomorphisme de E et en déduire que u est une similitude de E.

Etude d'une suite de matrices de similitudes

Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{t}{n} \\ \frac{t}{n} & 1 \end{pmatrix}$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Q 16 *Justifier que l'endomorphisme canoniquement associé à A_n est une similitude dont on précisera le rapport.*

Q 17 *Déterminer un réel $\rho_n > 0$ et un réel α_n tel que $A_n = \rho_n R_{\alpha_n}$. On pourra exprimer α_n à l'aide de la fonction arcsinus.*

Q 18 *En déduire que la suite (A_n^n) converge vers R_t.*

Remarque *On voit dans cette dernière partie que le recours aux matrices de rotations peut permettre d'étudier la convergence d'une suite de matrice sans passer par la diagonalisation.*

Exercice 2:

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E.

On suppose que f est diagonalisable et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.ses valeurs propres (deux à deux distinctes).

On note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes commutant avec f:

$$C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), \ f \circ g = g \circ f\}$$

On note $\mathbb{R}[f]$ l'ensemble des polynômes de l'endomorphismes f:

$$\mathbb{R}[f] = \{P(f), \ P \in \mathbb{R}[X]\}$$

Q 19 *Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ contenant $\mathbb{R}[f]$.*

On suppose que f est diagonalisable et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.ses valeurs propres (deux à deux distinctes).

Pour $i \in [[1, k]]$, on note b_i une base du sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ et $n_k = \dim(E_{\lambda_i}(f))$.

Soit b la famille obtenue par juxtaposition de des familles $b_1, \ldots, b_k$ et notée (abusivement) $b = (b_1, \ldots, b_k)$.

Soit g un endomorphisme de E.

Q 20 *Montrer que si $\forall i \in [[1, k]]$, $E_{\lambda_i}(f)$ est stable par g, alors $g \in C(f)$.*

Q 21 *Montrer que la réciproque de l'implication de la question précédente est vraie.*

Q 22 *En déduire que* $\dim(C(f)) = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i^2$.

Q 23 *Montrer que* $\dim(\mathbb{R}[f]) \leq k$ *(on pourra utiliser un polynôme annulateur bien choisi)*

Q 24 *Montrer que* $\dim(\mathbb{R}[f]) = k$ *et donner une base de* $\mathbb{R}[f]$.

Q 25 *En déduire que* $\mathbb{R}[f] = C(f)$ *si et seulement si* $k = n$.

Correction du DM10

Exercice 1:

Pour tout réel θ, on pose $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

R 1 *On obtient* $S_\theta \times S_{\theta'} = R_{\theta-\theta'}$. *On a donc* $S_{\theta'} \times S_\theta = R_{\theta'-\theta} \neq R_{\theta-\theta'}$ *si* $\sin(\theta-\theta') \neq \sin(\theta'-\theta)$ *soit si* $\theta-\theta' \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
La multiplication n'est pas commutative dans $O_2(\mathbb{R})$*?*

R 2 *Si* E *un espace eulidien de dimension* 2, *une isométrie* f *de* E *est une réfléxion ou une rotation.*
Si c'est une rotation, sa matrice dans une BON b *est de la forme* $R_\theta = S_\theta \times S_0$. *On en déduit que* $f = s_1 \circ s_2$ *avec* s_1 *et* s_2 *de matrice* S_θ *et* S_0 *dans* b *donc réflexions.*

R 3 *Justifier que* $S_\theta \times S_{\theta'} = R_{\theta'-\theta}$ *et* $S_{\theta+\alpha} \times S_{\theta'+\alpha} = R_{\theta'+\alpha-(\theta'+\alpha)} = R_{\theta'-\theta}$.

R 4 *Si* $k = 2p$, $p \in \mathbb{N}$, *alors* $M = (S_{\theta_1} \times S_{\theta_2}) \times \cdots \times (S_{\theta_2} \times S_{\theta_{2p}}) = R_{\theta_1-\theta_2} \times R_{\theta_3-\theta_4} \times \cdots \times R_{\theta_{2p-1}-\theta_{2p}}$ *or* $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$ *donc* $M = R_{(\theta_1-\theta_2)+(\theta_3-\theta_4)+\cdots+(\theta_{2p-1}-\theta_{2p-1})} = R_\alpha$ *avec* $\alpha = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1}\theta_i$.

R 5 *Si* $k = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$, *alors* $M = (S_{\theta_1} \times \cdots \times \times S_{\theta_{2p}}) \times S_{\theta_{2p+1}} = R_\alpha \times S_{\theta_{2p+1}}$ *avec* $\alpha = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\theta_i$
Or $.S_{\alpha+\theta_{2p+1}} \times S_{\theta_{2p+1}} = R_\alpha$ *donc* $M = S_{\alpha+\theta_{2p+1}} \times S_{\theta_{2p+1}} \times S_{\theta_{2p+1}} = S_{\alpha+\theta_{2p+1}}$.

Problème:

R 6 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* u *l'endomorphisme dont la matrice est* A *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *muni de son produit scalaire usuel.*
Montrer que u *est une similitude* u *dont on précisera le rapport.*

R 7 *Si* $k > 0$ *est le rapport de la similitude* u, *si* $x \in E$, *alors* $\|u(x)\| = k\|x\|$. *Si* $x \in \ker(u)$ *alors* $\|u(x)\| = \|0\| = 0$ *donc* $k\|x\| = 0$ *donc* $\|x\| = 0$ *donc* $x = 0_E$. *On en déduit que* $\ker(u) = \{0_E\}$ *donc* u *est injective donc* u *est bijective (endomorphiosme en dimension finie).donc* u *est un automorphisme de* E

R 8 *Soit* u *et* v *deux similitudes de rapports respectifs* k *et* l.
$u \circ v \in \mathcal{L}(E)$ *car* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $v \in \mathcal{L}(E)$.
Si $x \in E$, *alors* $\|u \circ v(x)\| = \|u(v(x))\| = k\|v(x)\| = k \times l\|x\|$ *donc* $u \circ v$ *est une similitude de rapport* $k \times l > 0$.
$u^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ *car* u *est bijective et* $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si $x \in E$. *Posons* $y = u^{-1}(x)$. *On a donc* $u(y) = x$ *et* $\|x\| = \|u(y)\| = k\|y\| = k\|u^{-1}(x)\|$ *donc* $\|u^{-1}(x)\| = \frac{1}{k}\|x\|$ *donc* u^{-1} *est une similitude de rapport* $\frac{1}{k} > 0$.

R 9 *Pour tout* $x \in E$, $\|u(x)\| = k\|x\| \Leftrightarrow \left\|\frac{1}{k}u(x)\right\| = \|x\|$ *donc* u *est une similitude de rapport* k *si et seulement si* $\dfrac{1}{k}u$ *est une isométrie vectorielle.*
Or $\dfrac{1}{k}u$ *est une isométrie vectorielle.si et seumlement si* $mat_B\left(\dfrac{1}{k}u\right) \in O_n(\mathbb{R})$ *c'est-à-dire si et seulement si* $\left(\dfrac{1}{k}M\right)^T \times \left(\dfrac{1}{k}M\right) = I_n$ *(car la base canonique est orthonormée) soit* $M^T \times M = k^2 I_n$.
donc u *est une similitude de rapport* k *si et seulement si* $M^T \times M = k^2 I_n$.

R 10 *On vériifie que* $\forall (i,j) \in [[1,3]]^2$, $\|C_i\| = 3$ *et si* $i \neq j$ *alors* $(C_i|C_j) = 0$. *Posons* $A' = \dfrac{1}{3}A$. *La matrice* A' *est orthogonale donc l'endomorphisme* u *canoniquement associé à* A *vérifie que* $\dfrac{1}{3}u$ *est une isométrie vectorielle et d'après la question précédente* u *est une similitude de rapport* 3.

On a $A = 3A'$ *donc* $A^{-1} = \dfrac{1}{3}(A')^{-1} = \dfrac{1}{3}(A')^T = \dfrac{1}{9}A^T = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

R 11 *L'implication directe découle de la définition des similitudes.*
Supposons qu'il existe $k >$ *tel que* $\forall x \in E$, $\|x\| = 1 \Rightarrow \|u(x)\| = k$ *(les vecteurs de norme* 1 *ont des images de même norme).*
Soit $y \in E$. *Si* $y \neq 0_E$, $x = \dfrac{1}{\|y\|}y$ *est unitaire donc* $\|u(x)\| = k$ *donc* $\left\|u\left(\dfrac{1}{\|y\|}y\right)\right\| = k$.
Or $\left\|u\left(\dfrac{1}{\|y\|}y\right)\right\| = \left\|\dfrac{1}{\|y\|}u(y)\right\| = \left|\dfrac{1}{\|y\|}\right|\|u(y)\| = \dfrac{1}{\|y\|}\|u(y)\|$.
On en déduit que $\|u(y)\| = k\|y\|$ *donc* u *est une similitude de* E.

R 12 *On a vu que u est une similitude de E de rapport k si et seulement si* $\dfrac{1}{k}u$ *est une isométrie vectorielle.*
$\dfrac{1}{k}u$ *est une isométrie vectorielle si et seulement si* $\forall(x,y)\in E^2, <\dfrac{1}{k}u(x)\mid \dfrac{1}{k}u(y)>=<x\mid y>$ *donc*
u est une similitude de E de rapport k si et seulement si $\forall(x,y)\in E^2, <u(x)\mid u(y)>=k^2<x\mid y>$.

R 13 *Supposons que u est une similitude de E de rapport* $k>0$.
Si $<x\mid y>=0$ *alors* $<u(x)\mid u(y)>=k^2<x\mid y>=0$ *donc u conserve l'orthogonalité.*

R 14 *On a* $\langle x+y\mid x-y\rangle=\langle x\mid x\rangle-\langle x\mid y\rangle+\langle y\mid x\rangle-\langle y\mid y\rangle=\|x\|^2-\|y\|^2=0.$
et u conserve l'orthogonalité donc $\langle u(x+y)\mid u(x-y)\rangle=0$.
Or $\langle u(x+y)\mid u(x-y)\rangle=\langle u(x)+u(y)\mid u(x)-u(y)\rangle=\|u(x)\|^2-\|u(y)\|^2$ *(calcul analogue au précédent).*
On en déduit que $\|u(x)\|=\|u(y)\|$.
Tous les vecteurs unitaires ont des images de même norme donc u est une similitude.

R 15 *Compte tenu de la caractérisation des similitudes de rapport k vue précédemment, il suffit de montrer que u est linéaire.*
Soit x,y,z *des éléments de E et* λ *et* μ *des réels. Montrons que* $u(\lambda x+\mu y)=\lambda u(x)+\mu u(y)$.
On a $<u(\lambda x+\mu y)\mid u(z)>=k^2<\lambda x+\mu y\mid z>=\lambda k^2<x\mid z>+\mu k^2<y\mid z>=\lambda<u(x)\mid u(z)>+\mu<u(y)\mid u(z)>$.
On en déduit que $<u(\lambda x+\mu y)\mid u(z)>=<\lambda u(x)+\mu u(y)\mid u(z)>$ *donc* $<u(\lambda x+\mu y)-(\lambda u(x)+\mu u(y))\mid u(z)>=0$.
Or u est bijective donc pour tout $t\in E$, *il existe* $z\in E$ *telle que* $t=u(z)$ *donc*
$<u(\lambda x+\mu y)-(\lambda u(x)+\mu u(y))\mid t)>=0$.
En prenant $t=u(\lambda x+\mu y)-(\lambda u(x)+\mu u(y))$, *on obtient* $<t\mid t)>=0$ *donc* $t=0_E$ *donc* $u(\lambda x+\mu y)=\lambda u(x)+\mu u(y)$ *donc u est linéaire.*

Etude d'une suite de matrices de similitudes

R 16 *Pour* $A_n=\begin{pmatrix}1 & -\frac{t}{n}\\ \frac{t}{n} & 1\end{pmatrix}$, *on a* $\|C_1\|=\|C_2\|=\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}=\rho_n$ *et* $(C_1|C_2)=0$ *donc* $\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}}A_n=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}} & -\frac{\frac{t}{n}}{\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}}\\ \frac{\frac{t}{n}}{\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}}\end{pmatrix}$ *qui est une matrice orthogonale (ses colonnes forment une base orthonormée) donc l'endomorphisme canoniquement associé à A est une similitude de rapport* $\rho_n=\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}$.

R 17 *On a* $\left|\dfrac{\frac{t}{n}}{\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}}\right|\leq 1$. *On peut poser* $\alpha_n=\arcsin\left(\dfrac{\frac{t}{n}}{\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}}\right)$. *On a* $\begin{cases}\cos^2(\alpha_n)+\sin^2(\alpha_n)=1\\ \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}}\right)^2+\left(\dfrac{\frac{t}{n}}{\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}}\right)^2=1\end{cases}$ *donc* $\cos^2(\alpha_n)=\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}}\right)^2$ *et* $\alpha_n\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *(ensemble d'arrivé de* $\arcsin$*) donc* $\cos(\alpha_n)\geq 0$ *donc* $\cos^2(\alpha_n)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}}$ *donc* $\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}}A_n=\begin{pmatrix}\cos(\alpha_n) & -\sin(\alpha_n)\\ \sin(\alpha_n) & \cos(\alpha_n)\end{pmatrix}$ *donc* $A_n=\rho_n R_{\alpha_n}$.

R 18 *On a* $A_n^n=(\rho_n R_{\alpha_n})^n=(\rho_n)^n(R_{\alpha_n})^n=(\rho_n)^n R_{n\times\alpha_n}$ *car* $R_\theta\times R_{\theta'}=R_{\theta+\theta'}$.
Or $n\alpha_n=n\arcsin\left(\frac{\frac{t}{n}}{\rho_n}\right)\sim_{n\to+\infty}n\times\left(\frac{\frac{t}{n}}{\rho_n}\right)\sim_{n\to+\infty}n\times\frac{t}{n}=t$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}n\alpha_n=t$ *et*
$(\rho_n)^n=e^{n\ln\left(\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}\right)}$ *or* $n\ln\left(\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}\right)=\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{t^2}{n^2}\right)\sim_{n\to+\infty}\frac{n}{2}\times\frac{t^2}{n^2}=\frac{t^2}{2n}$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln\left(\sqrt{1+\frac{t^2}{n^2}}\right)=0$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho_n=1$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho^n\cos(n\alpha_n)=\cos(t)$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho^n\sin(n\alpha_n)=\sin(t)$ *donc la suite* $(A_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\begin{pmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ \sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}=R_t$.

Exercice 2:

Soit E un espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E.
On suppose que f est diagonalisable et on note $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$.ses valeurs propres (deux à deux distinctes).
On note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes commutant avec f:

$$C(f)=\{g\in\mathcal{L}(E),\ f\circ g=g\circ f\}$$

On note $\mathbb{R}[f]$ l'ensemble des polynômes de l'endomorphismes f:

$$\mathbb{R}[f]=\{P(f),\ P\in\mathbb{R}[X]\}$$

R 19 *On vérifie que* $O_{\mathcal{L}(E)} \in C(f)$ *et* $C(f)$ *est stable par combinaison linéaire.*
D'après le cours, $P(f) \circ f = (PX)(f) = (XP)(f) = f \circ P(f)$ *donc* $\mathbb{R}[f] \subset C(f)$.

R 20 f *est diagonalisable donc* $E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}(f)$ *donc* $b = (b_1, \ldots, b_k)$. *est une base de* E.

la matrice de f *dans la base* b *est diagonale par blocs de la forme* $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0_{n_1,n_2} & \cdots & 0_{n_1,n_k} 0_{2,2} \\ 0_{n_2,n_1} & \lambda_2 I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{n_{k-1},n_k} \\ 0_{n_k,n_1} & \cdots & 0_{n_k,n_{k-1}} & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix}$.

Or $\forall i \in [[1,k]]$, $E_{\lambda_i}(f)$ *est stable par* g *donc la matrice de* g *dans la base* b *est diagonale par blocs de la forme* $N = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{n_1,n_2} & \cdots \\ 0_{n_2,n_1} & A_2 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ 0_{n_k,n_1} & \cdots & 0_{n_k,n_k} \end{pmatrix}$

avec $A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{R})$.
Or $\lambda_i I_{n_i} \times A_i = A_i = A_i \times \lambda_i I_{n_i}$ *donc, d'après les propriétés du produit de matrices diagonales par blocs,* $MN = NM$ *donc* $f \circ g = g \circ f$ *donc* $g \in C(f)$.

R 21 *Réciproquement, d'après le cours, si* $g \in C(f)$, *tout sous espace propre de* f *est stable par* g *donc* $\forall i \in [[1,k]]$, $E_{\lambda_i}(f)$ *est stable par* g, *alors* $g \in C(f)$.

R 22 *On sait que l'application* $\phi : \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{L}(E) \mapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ f \mapsto mat_b(f) \end{array} \right.$ *est un isomorphisme.*

D'après les deux questions précédentes, $g \in C(f) \Leftrightarrow \phi(f)$ *est diagonale par blocs de la forme* $\begin{pmatrix} A_1 & 0_{n_1,n_2} & \cdots & 0_{n_1,n_k} 0_{2,2} \\ 0_{n_2,n_1} & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{n_{k-1},n_k} \\ 0_{n_k,n_1} & \cdots & 0_{n_k,n_{k-1}} & A_k \end{pmatrix}$

avec $A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{R})$ *quelconque.*

Soit $\mathcal{E}$ *le sous-ensemble de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *des matrices de cette forme. On a* $\phi(C(f)) = \mathcal{E}$ *donc* $\dim(C(f)) = \dim(\mathcal{E}) = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i^2$.
Pour cette dernière égalité, on peut considérer la famille obtenue par juxtaposition des famille $(E_{i,j})_{(i,j) \in [[n_1+\cdots+n_{i-1}+1, n_1+\cdots+n_i]]^2}$

et montrer que c'est une base de $\mathcal{E}$ *ou introduire l'isomorphisme* $\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{R}) \to \mathcal{E} \\ (A_1, \ldots A_k) \mapsto \begin{pmatrix} A_1 & 0_{n_1,n_2} & \cdots & 0_{n_1,n_k} 0_{2,2} \\ 0_{n_2,n_1} & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{n_{k-1},n_k} \\ 0_{n_k,n_1} & \cdots & 0_{n_k,n_{k-1}} & A_k \end{pmatrix} \end{array} \right.$ *et utiliser la dimension d'un produit cartésien d'espaces vectoriels de dimension finie.*

R 23 *Soit* $P_0 = \prod\limits_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)$. *L'endomorphisme* f *est diagonalisable donc* $P_0(f) = 0$.
Soit $u \in \mathbb{R}[f]$ *et* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $u = P(f)$.
La division euclidienne de P *par* P_0 *donne deux polynôme* Q *et* R *vérifiant* $P = P_0 Q + R$ *et* $\deg(R) < \deg(P_0) = k$.
On a $u = P(f) = (P_0 Q + R)(f) = P_0(f) Q(f) + R(f) = R(f)$ *car* $P_0(f) = 0$ *donc*
$\mathbb{R}[f] = \{R(f),\ R \in \mathbb{R}_{k-1}[X]\} = \left\{a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_{k-1} A^{k-1},\ (a_0, \ldots a_k) \in \mathbb{R}^k\right\}$.
On a donc $\mathbb{R}[f] = vect\left(I_n, A, \ldots, A^{k-1}\right)$ *donc* $\dim(\mathbb{R}[f]) \leq k$.

Q 26 *Montrons que* $\left(I_n, A, \ldots, A^{k-1}\right)$ *est libre.*$a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_{k-1} A^{k-1} = 0$ *et* $(a_0, \ldots a_k) \neq (0, \ldots, 0)$.
On aurait onc un polynôme $P = a_0 I_n + a_1 X + \cdots + a_{k-1} X^{k-1}$ *non nul annulateur de* A. *Toute valeur propre de* A *étant racine de* P, *on en déduirait que* A *admet au plus* $k-1$ *valeurs propres, ce qui contredit les hypothèses donc* $\left(I_n, A, \ldots, A^{k-1}\right)$ *est libre.donc base de* $\mathbb{R}[f]$ *qui est bien de dimension* k.

Q 27 *On a* $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n$ *donc*

- *Si* $k = n$, *alors* $\forall i$, $n_i = 1$ *donc* $\dim(C(f)) = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i^2 = n = k = \dim(\mathbb{R}[f])$ *donc* $\mathbb{R}[f] = C(f)$ *'car une inclusion a été démontrée.*

- *Si* $k < n$ *alors* $\exists i$ *tel que* $n_i \geq 2$ *donc* $n_i^2 > n_i$ *donc* $\dim(C(f)) = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i^2 > \sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n > k = \dim(\mathbb{R}[f])$ *donc* $\mathbb{R}[f] \neq C(f)$.