

PSI DS 4 (le 11 décembre 2024, 4h)

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Questions indépendantes: Début du sujet 1

Q 1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^2 + I_n = 0$. Montrer que $\text{tr}(A) = 0$.

Q 2 Soit E un espace vectoriel euclidien et u une isométrie vectorielle de E . On suppose que -1 et 1 sont valeurs propres de u .

Montrer que les sous-espaces propres $E_1(u)$ et $E_{-1}(u)$ sont orthogonaux.

Q 3 Soit E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme autoadjoint de E . Montrer que $\text{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \forall x \in E, (u(x)|x) \geq 0$.

Q 4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^T \times A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Q 5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^2 + I_n = 0$. Montrer que $\text{tr}(A) = 0$.

Exercice: Début du sujet 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A vérifie $A^4 - 2A^2 + A = 0$. On pose $\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

Q 6 Justifier que A est diagonalisable et donner un ensemble à 4 éléments contenant le spectre de A .

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que M est inversible et vérifie $M^2 + M^T = I_n : (\mathcal{E})$.

Q 7 Montrer que $M^4 = 2M^2 - M$.

Q 8 Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose que $MX = X$. Montrer que $M^T X = 0$. En déduire que $X = 0$.

Q 9 Montrer que $(M - \lambda_1 I_n)(M - \lambda_2 I_n) = 0$.

Q 10 Montrer que M est symétrique.

Q 11 En déduire qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale avec des coefficients diagonaux appartenant à $\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Problème

Le but du problème est d'établir des liens entre les matrices antisymétriques et les matrices de rotation, c'est-à-dire les matrices orthogonales de déterminant $+1$

Les parties sont dans une très large mesure indépendantes.

Notations

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

On note I_n la matrice identité d'ordre n .

Pour tout entier $n > 0$, on désigne par $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques réelles de taille n , par $O_n(\mathbb{R})$ celui de matrices réelles orthogonales de taille n et par $SO_n(\mathbb{R})$ celui des matrices orthogonales de taille n de déterminant $+1$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pourra considérer l'application linéaire définie sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associée à A et supposer l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel.

Préliminaire

Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

Q 12 Montrer si n est impair, alors que $0 \in \text{sp}(A)$.

Q 13 Montrer que pour tout $P \in O_n(\mathbb{R})$, $P^{-1}AP$ est antisymétrique.

Partie I - exponentielle d'une matrice antisymétrique de taille 2

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$.

Q 14 Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer A^2 . En déduire la valeur des matrices A^{2k} et A^{2k+1} .

On pose $S_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} A^i$, $S'_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)!} A^{2k}$ et $S''_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)!} A^{2k+1}$.

Q 15 Préciser les matrices S'_n et S''_n .

Q 16 Exprimer S_{2n+1} à l'aide de S'_n et S''_n . Donner une expression analogue pour S_{2n} .

Q 17 Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et justifier que la limite de cette suite est une matrice de rotation.

On note, pour toute matrice $A \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$, $\exp(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Q 18 Réciproquement, on suppose que $R \in SO_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ telle que $R = \exp(A)$.

Partie II - matrice d'une rotation de l'espace

On considère $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

On munit E de l'orientation usuelle, c'est-à-dire qu'on suppose que la base canonique (e_1, e_2, e_3) est directe.

Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

Q 19 Montrer que A est une matrice de rotation.

On peut donc en déduire que f est une rotation distincte de l'identité.

Q 20 Déterminer l'axe de la rotation f .

Soit u_1 l'unique vecteur unitaire de l'axe de f de première composante strictement positive. On suppose que le plan $\text{vect}(u_1)^\perp$ est orienté par u_1 et on considère $\theta \in [-\pi, \pi]$ un angle de la rotation f .

Q 21 Déterminer $u_2 \in E$ tel que (u_1, u_2) soit une famille orthonormée de E et u_2 soit de troisième composante nulle.

Q 22 Compléter (u_1, u_2) en une base orthonormée directe (u_1, u_2, u_3) de E .

Q 23 Justifier que $\theta \in \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$.

Q 24 En exprimant $f(u_2)$ de deux manières différentes déterminer la valeur de θ .

Q 25 Donner, sans calcul, une matrice P orthogonale de taille 3 vérifiant $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Partie III - exponentielle d'une matrice antisymétrique de taille 3

On revient sur le problème de la première partie en dimension 3.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

Q 26 En utilisant la partie préliminaire, montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix}$.

On note $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix}$ tels que $P^{-1}AP = A'$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, pose $S_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} A^i$ et $S'_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} (A')^i$.

Q 27 Montrer que la suite $(S'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser la limite de cette suite.

On pose $L' = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$.

Q 28 En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et exprimer sa limite L à l'aide de L' et P . Justifier que $L \in SO_3(\mathbb{R})$.

On note, pour toute matrice $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, $\exp(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Q 29 Réciproquement, on suppose que $R \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ telle que $R = \exp(A)$.

Partie IV Un lien entre matrice antisymétriques et orthogonales en dimension 2 et 3

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $I_n + A$ est inversible, on pose $R(A) = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

IV 1 - Cas n=2

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $A_t = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$.

Q 30 Montrer qu'il existe un unique réel $\lambda > 0$ tel que $\frac{1}{\lambda}(I_2 + A_t)$ et $\frac{1}{\lambda}(I_2 - A_t)$ sont des matrices de rotation.

Q 31 En déduire que $I_2 + A_t$ est inversible d'inverse $\frac{1}{\lambda^2}(I_2 - A_t)$.

En déduire que $R(A_t) \in SO_2(\mathbb{R})$.

Q 32 Justifier que $R(A_t) = \frac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} 1-t^2 & -2t \\ 2t & 1-t^2 \end{pmatrix}$

Q 33 Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$ et $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Montrer que $\begin{cases} \frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos(\theta) \\ \frac{2t}{1+t^2} = \sin(\theta) \end{cases}$.

Q 34 En déduire que si $R \in SO_2(\mathbb{R})$ et $R \neq -I_2$, il existe une matrice $A \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ telle que $R = R(A)$.

IV 2 - Cas n=3

$R \in SO_3(\mathbb{R})$ une matrice de rotation dont l'application linéaire canoniquement associée est une rotation d'angle $\theta \in]-\pi, \pi[$.

Q 35 Justifier qu'il existe une matrice antisymétrique $A_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$(I_3 - A_0)(I_3 + A_0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Q 36 En déduire qu'il existe une matrice antisymétrique $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que:

$$R = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$$

Partie V - Généralisation à des matrices de taille quelconque

On cherche à étendre le résultat de la partie II à des matrices de taille quelconques.

Dans ce qui suit, n désigne un entier > 0 .

On rappelle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $I_n + A$ est inversible,

on pose $R(A) = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

V 1 - SENS DIRECT

Dans cette partie, on veut montrer la proposition:

Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors $R(A) \in SO_n(\mathbb{R})$ et $I_n + R(A)$ est inversible.

Q 37 Soient $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si C est inversible et $BC = CB$, alors $BC^{-1} = C^{-1}B$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

Q 38 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. En calculant de deux façons le produit scalaire $(AX|X)$, montrer que $\lambda = 0$.

Q 39 En déduire que si n est impair alors $sp(A) = \{0\}$.

Q 40 En déduire que $I_n + A$ est inversible.

Q 41 Montrer que $R(A) = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$.

Q 42 Montrer que $((I_n + A)^{-1})^T = (I_n - A)^{-1}$ (on fera apparaître clairement la propriété de cours utilisées).

Q 43 Montrer que $R(A)$ est une matrice orthogonale.

Q 44 Justifier que $I_n + R(A)$ est inversible.

Q 45 Montrer que $R(A) \in SO_n(\mathbb{R})$.

V 2 - Réciproque

Dans cette partie, on veut montrer la proposition:

Si $R \in SO_n(\mathbb{R})$ et $I_n + R$ est inversible alors il existe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $R(A) = R \in SO_n(\mathbb{R})$.

Soit $R \in SO_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n + R$ est inversible.

Partie analyse: On suppose qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $R(A) = R$.

Q 46 Montrer que $A = (I_n - R)(I_n + R)^{-1}$.

Q 47 Montrer que $((I_n + R)^{-1})^T = (R + I_n)^{-1} \times R$

Q 48 En déduire que A est antisymétrique.

Q 49 Montrer que $(I_n + R)^{-1}(I_n + A)^{-1} = \frac{1}{2}I_n$.

Q 50 Montrer que $(I_n + A)^{-1}A = \frac{1}{2}(I_n - R)$.

Partie synthèse: On ne suppose plus qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $R(A) = R$

Q 51 Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique telle que $R(A) = R$.

FIN

Questions indépendantes

R 1 voir cours.

R 2 voir cours.

R 3 voir cours.

R 4 Voir exercice du cours.

R 5 $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ scindé à racines simples donc A diagonalisable et $\text{sp}(A) \subset \{i, -i\}$.
On a donc $\text{tr}(A) = n_1 \times i + n_2(-i) = (n_1 - n_2)i \in \mathbb{R}$ car $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $n_1 = n_2$ et $\text{tr}(A) = 0$.

Exercice:

R 6 Le polynôme $P = X^4 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de A .

On a $P = X(X^3 - 2X + 1)$ et $X^3 - 2X + 1$ admet 1 comme racine.

On a $X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(X^2 + X - 1)$. Les racines de $X^2 + X - 1$ sont $\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$
donc $P = X(X - 1)(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$

Le polynôme P est scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

Le spectre de A est contenu dans l'ensemble $\{0, 1, \lambda_1, \lambda_2\}$ des racines de P .

R 7 On a $M^2 + M^T = I_n$ donc $M^2 = I_n - M^T$ et $M^4 = (I_n - M^T)^2 = I_n - 2M^T + (M^T)^2$.

et $(M^T)^2 = (M^2)^T = (I_n - M^T)^T = I_n - (M^T)^T = I_n - M$.

On en déduit que $M^4 = I_n - 2(I_n - M^2) + (I_n - M) = 2M^2 - M$.

R 8 Si $MX = X$ alors $M^2X = M \times MX = MX = X$. Or $M^2 + M^T = I_n$ donc $M^2X + M^TX = X$ donc $M^TX = 0$.

Or M est inversible donc M^T est inversible (car $\det(M^T) = \det(M)$).

En multipliant à gauche l'égalité $M^TX = 0$ par l'inverse de M^T , on obtient $X = 0$.

R 9 Or $MX = X \Leftrightarrow (M - I_n)X = 0$ donc d'après la question précédente, $\ker(M - I_n) = \{0\}$ et donc $1 \notin \text{sp}(M)$ et $M - I_n$ est inversible.

On a $M(M - I_n)(M - \lambda_1 I_n)(M - \lambda_2 I_n) = 0$. On multiplie à gauche par M^{-1} et ensuite par $(M - I_n)^{-1}$, on obtient $(M - \lambda_1 I_n)(M - \lambda_2 I_n) = 0$ soit $M^2 + M - I_n = 0$.

R 10 On a donc $M^2 + M - I_n = 0$ et $M^2 + M^T - I_n = 0$ donc $M^T = M$ donc M est symétrique

R 11 M est symétrique réelle donc, par le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}MP = D$ matrice diagonale de coefficient diagonaux appartenant à $\text{sp}(M)$ et $(M - \lambda_1 I_n)(M - \lambda_2 I_n) = 0$ donc $\text{sp}(M) = \text{sp}(D) \subset \{\lambda_1, \lambda_2\}$ donc les coefficients diagonaux de D appartiennent à $\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Problème

Préliminaire

Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

R 12 On a $A^T = -A$ donc $\det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ et $\det(A^T) = \det(A)$ donc $(-1)^n \det(A) = \det(A)$. Si n est impair $\det(A) = 0$ donc $0 \in \text{sp}(A)$.

R 13 Montrer que pour tout $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, Posons $A' = P^{-1}AP$.

On a $(A')^T = (P^{-1}AP)^T = (P^T AP)^T = P^T (P^T A)^T = P^T A^T P = -P^T AP$ car $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. et A antisymétrique donc A' est antisymétrique.

Partie I exponentielle d'une matrice antisymétrique de taille 2

R 14 On a $A^2 = \begin{pmatrix} -t^2 & 0 \\ 0 & -t^2 \end{pmatrix} = -t^2 I_2$. On a $A^{2k} = (-t^2 I_2)^k = (-t^2)^k I_2 = (-1)^k t^{2k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si p est impair, $A^p = A^{2k+1} = A^{2k} \times A = (-1)^k t^{2k} \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} = (-1)^k t^{2k+1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

R 15 On a $S'_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)!} A^{2k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} I_2 = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix}$ et

$S''_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)!} A^{2k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} & 0 \end{pmatrix}$

R 16 Or $S_{2n} = S'_n + S''_{n-1} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} & -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix}$ et

$S_{2n+1} = S'_n + S''_n = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} & -\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix}$

R 17 Or $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} = \cos(t)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin(t)$ donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = R_t \in SO_2(\mathbb{R})$ donc (S_n) converge vers R_t .

R 18 Réciproquement, toute matrice de $SO_2(\mathbb{R})$ s'écrit sous forme R_t donc est égale à $\exp(A)$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$.

Partie II - matrice d'une rotation de l'espace

R 19 Si $A = (C_1|C_2|C_3)$, on vérifie que (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc $A \in O_3(\mathbb{R})$.

On vérifie de plus que $\det(A) = 1$.

R 20 La résolution de $AX = X$ conduit à $X \in \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. On en déduit que l'axe de f est $\text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

R 21 On pose $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La famille (u_1, u_2) est orthonormée et u_2 est de troisième composante nulle.

R 22 Posons $u_3 = u_1 \wedge u_2$. La famille (u_1, u_2) est orthonormée donc (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormée directe de E .

On a $u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

R 23 On a $\text{tr}(A) = 2$ et en se plaçant dans la base (u_1, u_2, u_3) , $\text{tr}(f) = 1 + 2 \cos(\theta)$ donc $1 + 2 \cos(\theta) = 2$ donc $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$.

On en déduit que $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

R 24 L'endomorphisme f induit sur $\Delta^\perp = \text{vect}(u_2, u_3)$ une rotation plane d'angle θ , le plan $\Delta^\perp$ étant orienté par u_1 et (u_1, u_2, u_3) est une BOND de E donc (u_2, u_3) est une BOND de $\Delta^\perp$. On a donc $f(u_2) = \cos(\theta)u_2 + \sin(\theta)u_3$. On a donc

$$A \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos(\theta) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(\theta) \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La troisième ligne de cette égalité est $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(\theta) \frac{2}{\sqrt{6}}$ donc $\sin(\theta) \geq 0$ donc $\theta = \frac{\pi}{3}$.

R 25 On a donc $\text{mat}_{(u_1, u_2, u_3)}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R_{\frac{\pi}{3}} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

On en déduit que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ avec $P = P_{b_0 \rightarrow (u_1, u_2, u_3)} \in O_3(\mathbb{R})$ car b_0 et (u_1, u_2, u_3) sont orthonormées.

Partie III - exponentielle d'une matrice antisymétrique de taille 3

R 26 Soit f canoniquement associée à A et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

D'après la partie préliminaire. $0 \in \text{sp}(A) = \text{sp}(f)$. Soit $u_1 \in \text{sp}(f)$ un vecteur unitaire.

Complétons u_1 en une base orthonormée (u_1, u_2, u_3) .

On a $A' = \text{mat}_{(u_1, u_2, u_3)}(f) = P^{-1}AP$ avec $P = P_{(e_1, e_2, e_3) \rightarrow (u_1, u_2, u_3)} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ car (e_1, e_2, e_3) et (u_1, u_2, u_3) sont des bases orthonormées (u_1, u_2, u_3) .

A' est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & d \\ 0 & b & e \\ 0 & c & f \end{pmatrix}$ et d'après la partie préliminaire, A' est antisymétrique donc $a = d = b = f = 0$

et $e = -c$ donc $\exists t \in \mathbb{R}$ tel que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix}$.

R 27 On a $A' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A_t \end{array} \right)$ avec $A_t = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$ donc $(A')^i = \left(\begin{array}{c|c} 0^i & 0 \\ \hline 0 & (A_t)^i \end{array} \right)$ d'après les règles du produit par bloc.

On a donc $S'_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} (A')^i = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(\begin{array}{c|c} 0^i & 0 \\ \hline 0 & (A_t)^i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \sum_{i=0}^n \frac{0^i}{i!} & 0 \\ \hline 0 & \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} (A_t)^i \end{array} \right)$.

Or $\sum_{i=0}^n \frac{0^i}{i!} = 1$ et d'après la partie concernant les matrices de taille 2, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} (A_t)^i = R_t$.

On en déduit que la suite (S'_n) converge vers $L' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R_t \end{array} \right)$.

R 28 On a $A' = P^{-1}AP$ donc $A = PA'P^{-1}$.

On en déduit que $A^i = (PA'P^{-1})^i = P(A')^i P^{-1}$ et donc $S_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} P(A')^i P^{-1} = PS'_n P^{-1}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = L'$ donc par continuité du produit matriciel, (S_n) converge vers $L = PL'P^{-1}$.

De plus, $P \in O_3(\mathbb{R})$ et $L' \in SO_3(\mathbb{R})$ donc, par stabilité de $O_3(\mathbb{R})$ par produit et inverse, $L \in O_3(\mathbb{R})$.

De plus, $\det(L) = \det(L') = 1$ car L et L' sont semblables donc $L \in SO_3(\mathbb{R})$.

R 29 Réciproquement, on suppose que $R \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

D'après le cours, l'application linéaire canoniquement associée à R est une rotation de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel donc il existe une base orthonormée b dans laquelle, $\text{mat}_b(f) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R_t \end{array} \right)$ donc $\exists P \in O_3(\mathbb{R})$ telle

que $P^{-1}RP = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R_t \end{array} \right)$. On en déduit, en reprenant les notations précédentes que $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R_t \end{array} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = L$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = R$.

Partie IV - Etude de $R(A)$ en dimension 2 et en dimension 3

IV 1 - n=2

R 30 On pose $A_t = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ donc $I_2 + A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$ et $I_2 - A_t = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie pour ces deux matrices $\|C_i\| = \sqrt{1+t^2}$ et $(C_1|C_2) = 0$ donc $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(I_2 + A_t)$ et $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(I_2 - A_t)$ sont orthogonales et de déterminant 1 (calcul immédiat).

R 31 On a donc $\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(I_2 + A_t) \right)^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(I_2 + A_t) \right)^T = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(I_2 - A_t)$.

Or si $\alpha \neq 0$ alors M inversible $\Leftrightarrow (\alpha M)$ inversible et dans ce cas $(\alpha M)^{-1} = \alpha^{-1}M^{-1}$ donc $\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(I_2 + A_t) \right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(I_2 - A_t)$ donc $(I_2 + A_t)^{-1} = \frac{1}{t^2+1}(I_2 - A_t)$.

On en déduit que $R(A_t) = (I_2 - A_t) \frac{1}{t^2+1} (I_2 - A_t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(I_2 - A_t) \right)^2$ Or $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(I_2 - A_t) \in SO_2(\mathbb{R})$ qui est stable par produit donc $R(A_t) \in SO_2(\mathbb{R})$.

R 32 On a donc $R(A_t) = \frac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{t^2+1} \begin{pmatrix} 1-t^2 & -2t \\ 2t & 1-t^2 \end{pmatrix}$.

R 33 $\theta \in]-\pi, \pi[\Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et donc $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est défini et

$$\text{On a } \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} = \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos\left(2\frac{\theta}{2}\right)}{1} = \cos(\theta). \quad \text{La}$$

deuxième relation s'obtient de la même façon.

R 34 Posons $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. D'après le cours, $\theta \in]-\pi, \pi[$ donc $R_\theta \neq -I_2 = R_\pi$.

En prenant $t = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on a $R_\theta = R(A_t)$ avec $A_t = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$.

IV 2 cas n=3

R 35 Si $A_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A_t \end{array}\right) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a $I_3 + A_0 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & I_2 + A_t \end{array}\right)$ et $I_2 + A_t$ est inversible (déjà vu)

Les règles du produit par bloc donnent $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & I_2 + A_t \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & (I_2 + A_t)^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & I_2 \end{array}\right) = I_3$. On en déduit que $(I_2 + A_0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & (I_2 + A_t)^{-1} \end{array}\right)$.

La matrice A_0 bien antisymétrique et, comme $\theta \in]-\pi, \pi[$, d'après le cas $n=2$ de la section précédente, il existe $A_t = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ telle que $(I_n - A_t)(I_n + A_t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$(I_3 - A_0)(I_3 + A_0)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & I_2 - A_t \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & (I_2 + A_t)^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R(A_t) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

R 36 Soit une base orthonormée directe de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de premier vecteur u , $b = (u, v, w)$.

La matrice de r est $R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Si bc est la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors $R = \text{mat}_{bc}(r) = P^{-1}R_0P$ avec $P = P_{b \rightarrow bc}$. Les base b et bc sont orthonormées donc $P \in O_3(\mathbb{R})$.

On a $(I_3 - A_0)(I_3 + A_0)^{-1} = R_0$ donc $R = P^{-1}(I_3 - A_0)(I_3 + A_0)^{-1}P = (P^{-1}(I_3 - A_0)P) \times (P^{-1}(I_3 + A_0)^{-1}P)$.

On a $P^{-1}(I_3 - A_0)P = P^{-1}I_3P - P^{-1}A_0P = I_3 - A$ avec $A = P^{-1}A_0P$.

On a alors $(I_3 + A)^{-1} = (P^{-1}I_3P + P^{-1}A_0P)^{-1} = (P^{-1}(I_3 + A_0)P)^{-1} = P^{-1}(I_3 + A_0)^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}(I_3 + A_0)^{-1}P$.

On a donc bien $R = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

Partie V - Généralisation à des matrices de taille quelconque

V 1 - SENS DIRECT

R 37 Si $C \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et si $BC = CB$, en multipliant à droite et à gauche par C^{-1} , il vient $C^{-1}B = BC^{-1}$.

R 38 D'une part, $(AX|X) = (AX)^T \times X = (\lambda X^T) \times X = \lambda \|X\|^2$,
D'autre part, $(AX|X) = (AX)^T \times X = (X^T A^T) \times X = X^T \times (-AX)$ car A est antisymétrique donc
 $(AX|X) = X^T \times (-\lambda X) = -\lambda \|X\|^2$. Or $X \neq 0$ donc $\|X\|^2 \neq 0$ donc $\lambda = 0$.

R 39 D'après la question précédente, $\text{sp}(A) \subset \{0\}$ et n est impair donc χ_A est un polynôme réel de degré n impair donc admet une racine (exo de cours: prendre les limites de χ_A en $\pm\infty$ ou analyser la décomposition en irréductibles de χ_A). On en déduit que $\text{sp}(A) \neq \emptyset$ donc $\text{sp}(A) = \{0\}$.

R 40 Si $X \in \ker(I_n + A) = \ker(A - I_n) = \{0\}$ car 1 n'est pas valeur propre de A donc $\ker(I_n + A) = \{0\}$ donc $I_n + A$ est inversible.

R 41 D'après le cours, les polynômes en A commutent donc $(I_n - A)(I_n + A) = (I_n + A)(I_n - A)$ et $I_n + A$ est inversible donc (première question de la partie) $(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ d'où le résultat.

R 42 Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors M^T est inversible et $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$ d'où $((I_n + A)^{-1})^T = ((I_n + A)^T)^{-1} = (I_n - A)^{-1}$.

R 43 On a $R(A) = (I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ donc $R(A)^T = (I_n - A)^T \times ((I_n + A)^{-1})^T$.
Or $(I_n - A)^T = I_n^T - A^T = I_n + A$ et $((I_n + A)^{-1})^T = ((I_n + A)^T)^{-1} = (I_n - A)^{-1}$ donc $R(A)^T = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}$.
On en déduit que $R(A)^T \times R(A) = I_n$ donc $R(A)$ est une matrice orthogonale.

R 44 Si $X \in \ker(I_n + R(A))$ alors $R(A)X = -X$ donc $(I_n + A)^{-1}(I_n - A)X = -X$ donc $(I_n - A)X = (I_n + A) \times (-X)$ donc $X = -X$ donc $X = 0$.
On en déduit que $\ker(I_n + R(A)) = \{0\}$ donc $I_n + R(A)$ est inversible.

R 45 On a $\det(R(A)) = \det(I_n - A) \times \det(I_n + A)^{-1} = \frac{\det(I_n - A)}{\det(I_n + A)}$ et $\det(I_n + A) = \det((I_n + A)^T) = \det(I_n^T + A^T) = \det(I_n - A)$ donc $\det(R(A)) = +1$. Or $R(A) \in O_n(\mathbb{R})$ donc $R(A) \in SO_n(\mathbb{R})$.

V 1 - SENS RECIPROQUE

Partie analyse

R 46 $(I_n + A)^{-1}(I_n - A) = R$ donc $I_n - A = (I_n + A)R$ donc $I_n - R = AR + A = A(I_n + R)$ donc, puisque $I_n + R$ est inversible, $A = (I_n - R)(I_n + R)^{-1}$.

R 47 On a $((I_n + R)^{-1})^T = ((I_n + R)^T)^{-1} = (I_n + R^T)^{-1}$ car $(I_n + R)^T = I_n^T + R^T = I_n + R^T$.

La matrice R est orthogonale donc $R^T \times R = I_n$ donc $(I_n + R^T)^{-1} = (R^T \times R + R^T)^{-1} = (R^T(R + I_n))^{-1} = (R + I_n)^{-1} \times (R^T)^{-1} = (R + I_n)^{-1} \times R$

R 48 $A^T = ((I_n - R)(I_n + R)^{-1})^T = ((I_n + R)^{-1})^T \times (I_n - R)^T = (I_n + R)^{-1} \times R \times (I_n - R^T) = (I_n + R)^{-1} \times (R - RR^T) = (I_n + R)^{-1} \times (R - I_n) = -A$ donc A est antisymétrique.

R 49 $(I_n + R)^{-1}(I_n + A)^{-1} = ((I_n + A)(I_n + R))^{-1} = [(I_n + R) + (I_n - R)]^{-1} = (2I_n)^{-1} = \frac{1}{2}I_n$.

R 50 $(I_n + A)^{-1}A = [I_n + (I_n - R)(I_n + R)^{-1}]^{-1}(I_n + R)^{-1}(I_n - R)$.

Or $[I_n + (I_n - R)(I_n + R)^{-1}]^{-1}(I_n + R)^{-1} = ((I_n + R)(I_n + (I_n - R)(I_n + R)^{-1}))^{-1}$ et
 $(I_n + R)(I_n - R)(I_n + R)^{-1} = (I_n - R)(I_n + R)(I_n + R)^{-1} = I_n - R$ donc
 $(I_n + A)^{-1}A = ((I_n + R) + (I_n - R))^{-1}(I_n - R) = (2I_n)^{-1}(I_n - R) = \frac{1}{2}(I_n - R)$.

Partie synthèse:

R 51 Soit $A = (I_n - R)(I_n + R)^{-1}$, on a vu que A est antisymétrique et $R(A) = (I_n + A)^{-1}(I_n - A) = (I_n + A)^{-1} - (I_n + A)^{-1}A$.

On a vu que $(I_n + R)^{-1}(I_n + A)^{-1} = \frac{1}{2}I_n$ donc $(I_n + A)^{-1} = \frac{1}{2}(I_n + R)$ et on a vu que $(I_n + A)^{-1}A = \frac{1}{2}(I_n - R)$.
On en déduit que $R(A) = R$.

FIN

En reprenant les notations du début de la partie, on a $R = \exp(A)$ avec $A = P \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A_t \end{array} \right) P^{-1}$.

Q 52 On suppose que $n = 3$ et que $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée usuelle. Soit $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On suppose $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$. On note f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x) = u \wedge x$ et r l'endomorphisme canoniquement associé à $R(A)$.

1. Montrer que f est linéaire et préciser $\ker(f)$.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Justifier que r est une rotation différente de l'identité et déterminer l'axe de r .

R 52 On suppose $n = 3$.

1. La bilinéarité du produit vectoriel entraîne, pour x, y dans $\mathbb{R}^3$ et λ et μ réels, que $f(\lambda x + \mu y) = u \wedge (\lambda x + \mu y) = \lambda(u \wedge x) + \mu(u \wedge y) = f(x) + f(y)$ donc f est linéaire.
2. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique. On a $f(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}$ et de même, $f(e_2) = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ et $f(e_3) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\text{mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(f) = A$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On a $f(x) = 0 \Leftrightarrow u \wedge x = 0 \Leftrightarrow (u, x)$ est liée $\Leftrightarrow x \in \text{vect}(u)$ (car $u \neq 0_E$) donc $\ker(f) = \text{vect}(u)$.
4. On a $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ donc $R(A) \in SO_3(\mathbb{R})$ et la base canonique est orthonormée donc r est une rotation. Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
On a $R(A)X = X \Leftrightarrow (I_n + A)^{-1}(I_n - A)X = X \Leftrightarrow (I_n - A)X = (I_n + A)X \Leftrightarrow 2AX = 0$.
On en déduit que les vecteurs invariants de r sont les vecteurs de $\ker(f)$ qui est de dimension 1 donc $r \neq \text{id}_E$ et l'axe de r est égal à $\text{vect}(u)$.