DM 12 (pour le 6 janvier 2025)

Exercice 1 : une caractérisation de la loi géométrique

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et de même loi, toutes les deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$I(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega)), \quad M(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega)) \quad \text{et} \quad D(\omega) = M(\omega) - I(\omega)$$

1: Dans cette question, on suppose que la loi commune de X et Y est géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pourra poser $q = 1-p$.

1a: Déterminer la loi de la variable I (reconnaître une loi connue).

1b: Exprimer l'evénement $(I = i) \cap [(D = d)$ à l'aide des variables aléatoires X et Y.
(*On séparera les cas $d = 0$ et $d > 0$.*)
Calculer, pour tout $(i, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, la probabilité $\mathbb{P}((I = i) \cap (D = d))$ (qu'on pourra noter $\mathbb{P}(I = i, D = d)$).

1c: En utilisant la formule des probabilités totales, déterminer la loi de la variable D.

1d: Vérifier que les variables I et D sont indépendantes.

2: Dans cette question, la loi commune de X et Y est inconnue et on suppose que les variables I et D sont indépendantes.
On note $b = \mathbb{P}(D = 0)$ et, pour tout entier naturel k non nul, $p_k = \mathbb{P}(X = k)$.
On suppose $p_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2a: Montrer que $b = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k^2$. Donner une expression analogue de $\mathbb{P}((I > k) \cap (D = 0))$.

2b: Justifier que, pour tout entier naturel k, $\mathbb{P}(I > k) = \left(\sum\limits_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2$.

2c: Soit $k \in \mathbb{N}$. En calculant de deux manières différentes la probabilité $\mathbb{P}(I > k, D = 0)$ établir l'égalité

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2 = b\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2.$$

2d: En déduire, pour tout entier naturel k non nul, l'égalité: $(1-b)p_k = 2b\mathbb{P}(X > k) : (\mathcal{E}_k)$

2e: Déduire de $(\mathcal{E}_1)$ que $p_1 = \dfrac{2b}{1+b}$.

2f: Utiliser les égalités $(\mathcal{E}_k)$ et $(\mathcal{E}_{k+1})$ pour établir que pour tout k entier naturel non nul,

$$p_{k+1} = \frac{1-b}{1+b}\, p_k.$$

2g: En déduire que la loi commune des variables X et Y est géométrique de paramètre p_1.

Exercice 2: sur les sommes de Riemann:

Pour une fonction f continue de $[a,b]$.dans $\mathbb{R}$, on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [[0,n]]$, $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et

$$I = \int_a^b f(t)\,dt, \quad R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \text{ et } R'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k).$$

Démonstration du résultat de cours dans le cas d'une fonction de classe C^1

Dans les trois premières questions, On suppose que f est de classe C^1 sur $[a,b]$ et on pose $M = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Q 1 *Justifier que* $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt - \dfrac{b-a}{n} f(a_k) = \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(a_k))\,dt$.

Q 2 *En déduire que* $\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt - \dfrac{b-a}{n} f(a_k)\right| \leq \dfrac{M(b-a)^2}{2n^2}$.

Q 3 *En déduire que la suite* (R_n) *converge vers* I.

On a donc démontré que la suite des sommes de Riemann (R_n) converge vers I. Ce résultat subsiste si f est seulement continue et si on remplace R_n ('somme de Riemann "à gauche") par R'_n (somme de Riemann "à droite").

Exemples d'applications

Q 4 *On pose, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{k}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$. *Montrer que la suite* (u_n) *converge et donner sa limite.*

Q 5 *On pose, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n! \times n^n}}$. *Montrer que la suite* (u_n) *converge et donner sa limite.*

Exemple d'utilisation en probabilités

Soit Ω un espace propbabilisé et $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
On considère une famille $(X_1, \ldots, X_p)$ de variables aléatoires définies sur Ω indépendantes suivant une loi uniforme $U([[0, n-1]])$.
On pose $Y_{n,p} = \min(X_1, \ldots, X_p)$.

Q 6 *Pour* $k \in [[0, n-1]]$, *préciser* $P(Y_{n,p} \geq k)$.

Q 7 *Dans cette question,* p *est fixé.*
Déduire de la question précédente une expression de $E(Y_{n,p})$.
Montrer que $E(Y_{n,p}) \sim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{p+1}$.

Suite ressemblant à une somme de Riemann

Q 8 *On pose, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)$ *et* $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{k\pi}{n^2}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
Montrer que la suite (v_n).*converge et préciser sa limite.*
Montrer avec l'inégalité de Taylor Lagrange que $|\sin(x) - x| \leq \dfrac{x^3}{6}$. *En déduire que suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*converge et préciser sa limite.*

Exercice 3:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices de taille n à coefficients dans $\{-1, 1\}$ et proportionnelles à une matrice orthogonale.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathcal{H}_n$ si et seulement si M est à coefficients dans $\{-1, 1\}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \times M \in O_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\mathcal{H}_2$.
3. Justifier que $\mathcal{H}_n$ est fini et donner un majorant de $card(\mathcal{H}_n)$.
4. Soit $A \in \mathcal{H}_n$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline -A & A \end{array}\right)$. Montrer que $M \in H_{2n}$.
5. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. On souhaite montrer l'existence de R matrice orthogonale et S matrice symétrique définie positive telle que $M = RS$.
   (a) On suppose qu'il existe $R \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $M = RS$. Exprimer S^2 en fonction de M^T et M.
   (b) Montrer que la matrice $\left(M^T\right) \times M$ est symétrique définie positive.
   (c) En déduire qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $\left(M^T\right) \times M = S^2$.
   (d) Montrer que si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\left(M^T\right) \times M = S^2$ alors S est inversible et MS^{-1} est orthogonale.
   (e) Conclure.
   (f) Montrer l'unicité d'une telle factorisation.
6. Soit $\Sigma \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec multiplicité, D la matrice diagonale de taille n dont les éléments diagonaux sont, dans l'ordre, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que $tr(\Sigma) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$.
   (b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q' telle que $tr(Q\Sigma) = tr(Q'D)$ et en déduire :
   $$|tr(Q\Sigma)| \leq tr(\Sigma)$$
   (c) Montrer que $\sup\limits_{Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} |tr(Q\Sigma)| = tr(\Sigma)$.
7. Soit $n \in E$. Pour toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{H}_n$, on pose :
   $$f(A) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$$
   (a) Justifier que l'application f ainsi définie de $\mathcal{H}_n$ dans $\mathbb{R}$ admet un maximum que l'on notera α_n.
   (b) Déterminer une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = (t_{i,j})$ telle que $\forall A \in \mathcal{H}_n,\ f(A) = tr(AT)$.
   (c) D'après la question **5**, on sait qu'il existe une matrice R orthogonale et une matrice S symétrique définie positive telle que $T = RS$. Montrer alors que $f(A) \leq \sqrt{n}tr(S)$, puis que $\alpha_n \leq \sqrt{n}tr(S)$.
   (d) Lorsque $n = 2$, évaluer α_2 et $\sqrt{2}tr(S)$.

Exercice 1 : une caractérisation de la loi géométrique

1a: Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}(I \geq k) = \mathbb{P}((X \geq k) \cap (Y \geq k)).$$

Or X et Y sont indépendantes et de même loi, donc

$$\mathbb{P}(I \geq k) = \mathbb{P}(X \geq k)^2.$$

X suivant une loi géométrique de paramètre p, et en posant $q = 1 - p$ on déduit

$$\mathbb{P}(I \geq k) = q^{2(k-1)}.$$

Donc $\mathbb{P}(I = k) = \mathbb{P}(I \geq k) - \mathbb{P}(I \geq k+1) = q^{2(k-1)}(1-q^2)$. Ainsi I suit une loi géométrique $\mathcal{G}\left(1-q^2\right)$.

1b: $\mathbb{P}(I = i, D = d) = \mathbb{P}(I = i, M = d + i)$.

- Si $d = 0$, $\mathbb{P}(I = i, M = d+i) = \mathbb{P}(I = i, M = i) = \mathbb{P}(X = i, Y = i) \underset{indépendance}{=} \mathbb{P}(X = i) \times \mathbb{P}(Y = i)$

  donc $\mathbb{P}(I = i, M = i) = q^{2(i-1)}p$.
- Si $d \neq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(I = i, M = d+i) &= \mathbb{P}(I = i, M = d+i) = \mathbb{P}((X = i, Y = d+i) \cup (X = d+i, Y = i)) \\ &\underset{union\ disjointe}{=} \mathbb{P}(X = i, Y = d+i) + \mathbb{P}(X = d+i, Y = i) = 2\mathbb{P}(X = i, Y = d+i) \\ &\underset{indépendance}{=} 2\mathbb{P}(X = i) \times \mathbb{P}(Y = d+i) = 2q^{d+2(i-1)}p^2 \end{aligned}$$

  donc $\mathbb{P}(I = i, M = d+i) = 2q^{d+2(i-1)}p^2$.

1c: Les événements $(I = i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ formant un système complet d'evénements, on a $\mathbb{P}(D = d) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}((I = i) \cap D = d)$.

- $\mathbb{P}(D = 0) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} q^{2(i-1)}p^2 = p^2 \sum\limits_{i=0}^{+\infty} q^{2i} = \dfrac{p^2}{1-q^2} = \dfrac{p}{1+q}$.
- Si $d \neq 0$, $\mathbb{P}(D = d) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} 2q^{d+2(i-1)}p^2 = \dfrac{2pq^d}{1+q}$.

1d: En reprenant les valeurs obtenues ci-dessus, on vérifie que pour tous les couples $(i, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(I = i, D = d) = \mathbb{P}(I = i)\,\mathbb{P}(D = d)$ (distinguer les cas $d = 0$ et $d \neq 0$).

2a: On a $(D = 0) = (X = Y) = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}^*} (X = i) \cap (Y = i)$ qui est une union disjointe. On en déduit que

$$\mathbb{P}(D = 0) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = i) \underset{indépendance}{=} \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i^2.$$

De même, $\mathbb{P}(I > k, D = 0) = \bigcup\limits_{i=k+1}^{+\infty} (X = k) \cap (Y = k)$ donc $\mathbb{P}((X = Y) \cap (X > k)) = \sum\limits_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2$.

2b: On reprend le même calcul qu'au (1.b)

$$\mathbb{P}(I > k) = \mathbb{P}((X > k) \cap (Y > k)).$$

Or X et Y sont indépendantes et de même loi, donc

$$\mathbb{P}(I > k) = \mathbb{P}(X > k)^2 = \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2.$$

2c: On calcule de deux manières différentes $\mathbb{P}(I > k, D = 0)$.

D'une part, $\mathbb{P}(I > k, D = 0) = \mathbb{P}((X = Y) \cap (X > k)) = \sum\limits_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2$.

D'autre part, comme I et D sont indépendantes, $\mathbb{P}(I > k, D = 0) = \mathbb{P}(I > k)\,\mathbb{P}(D = 0) = b\left(\sum\limits_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2$.

On conclut donc que

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2 = b\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2.$$

2d: On prend l'égalité précédente pour k et $k-1$: $\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i^2 = b\left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2$ et $\sum_{i=k}^{+\infty} p_i^2 = b\left(\sum_{i=k}^{+\infty} p_i\right)^2$.

En soustrayant la première à la deuxième, $p_k^2 = b\left(\left(\sum_{i=k}^{+\infty} p_i\right)^2 - \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2\right)$ Or

$\left(\sum_{i=k}^{+\infty} p_i\right)^2 - \left(\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)^2 = \left(\sum_{i=k}^{+\infty} p_i - \sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right)\left(\sum_{i=k}^{+\infty} p_i + \sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right) = p_k\left(p_k + 2\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i\right) = p_k\left(p_k + 2\mathbb{P}\left(X > k\right)\right)$.

On en déduit l'égalité : $p_k^2 = bp_k\left(p_k + 2\mathbb{P}\left(X > k\right)\right)$ donc, comme $p_k \neq 0$, $p_k = b\left(p_k + 2\mathbb{P}\left(X > k\right)\right)$ donc $(1-b)p_k = 2b\mathbb{P}\left(X > k\right)$.

2e: La formule ci-dessus, pour $k = 1$, donne $(1-b)p_1 = 2b\left(1 - p_1\right)$, c'est-à-dire $\left(1 + b\right)p_1 = 2b$ soit $p_1 = \dfrac{2b}{1+b}$.

2f: On a $(1-b)p_{k+1} = 2b\mathbb{P}\left(X > k+1\right)$ et $(1-b)p_k = 2b\mathbb{P}\left(X > k\right)$ et en soustrayant la première à la deuxième

$$(1-b)\left(p_k - p_{k+1}\right) = 2b\left(\mathbb{P}\left(X > k\right) - \mathbb{P}\left(X > k+1\right)\right) = 2b\mathbb{P}\left(X = k+1\right) = -2bp_{k+1}.$$

On en déduit que $(1+b)p_{k+1} = (1-b)\,p_k$. d'où l'égalité $p_{k+1} = \dfrac{1-b}{1+b}\,p_k$.

2g: Posons $q_1 = 1 - p_1 = 1 - \dfrac{2b}{1-b} = \dfrac{1-b}{1+b}$. On a donc $p_{k+1} = q_1 p_k$ donc (p_k) est une suite géométriquie de raison q_1 donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = p_1 q_1^{k-1}$. On en déduit que X (et donc Y) suit une loi géométrique de paramètre p_1.

Exercice 2: sur les sommes de Riemann:

R 1 *On a* $\int_{a_k}^{a_{k+1}} 1dt = (a_{k+1} - a_k) = \dfrac{b-a}{n}$ *donc* $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt - \dfrac{b-a}{n} f(a_k) = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt - f(a_k)\int_{a_k}^{a_{k+1}} 1dt = \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(a_k))\,dt.$

R 2 *On a donc* $\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt - \dfrac{b-a}{n} f(a_k)\right| = \left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(a_k))\,dt\right| \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)|\,dt.$
La fonction f *étant de classe* C^1*, d'après l'inégalité des accroissements finis,*
si $t \in [a_k, a_{k+1}]$*, alors* $|f(t) - f(a_k)| \leq M|t - a_k| = M(t - a_k)$ *donc*
$\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)|\,dt \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} M(t - a_k)\,dt = M\left[\dfrac{(t-a_k)^2}{2}\right]_{a_k}^{a_{k+1}} = M\dfrac{(a_{k+1}-a_k)^2}{2} = \dfrac{M(b-a)^2}{2n^2}$

R 3 *La relation de Chasles donne:* $I = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt$ *donc* $I - R_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt - \dfrac{b-a}{n} f(a_k)\right)$
donc $|I - R_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt - \dfrac{b-a}{n} f(a_k)\right| \leq n\dfrac{M(b-a)^2}{2n^2} = \dfrac{M(b-a)^2}{2n}$ *d'après la question précédente.*
Or $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{M(b-a)^2}{2n} = 0$ *donc* $\lim_{n\to+\infty} R_n = I.$

R 4 *On a* $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{k}{n\sqrt{4 - k^2/n^2}} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{k/n}{n\sqrt{4-k^2/n^2}} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ *avec* $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ *qui est continue sur* $[0,1]$ *Si* $a = 0$ *et* $b = 1$*, on a* $R_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right) = u_n$ *donc* $\lim_{n\to+\infty} u_n = I_1 = 2 - \sqrt{3}.$

R 5 *Posons* $v_n = \ln(u_n)$*. On a* $v_n = \ln\left(\left(\dfrac{(2n)!}{n! \times n^n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\dfrac{(n+1)\times(n+2)\times\cdots\times(2n)}{n\times n\times\cdots\times n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\dfrac{n+i}{n}\right)$
donc $v_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1 + \dfrac{i}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ *avec* $f : x \mapsto \ln(1+x)$*. Si* $a = 0$ *et* $b = 1$*, on a* $R'_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) = v_n$ *avec* f *qui est continue sur* $[0,1]$ *donc* $\lim_{n\to+\infty} v_n = I_2 = 2\ln(2) - 1$*. Or* $u_n = e^{v_n}$ *donc par composition des limites,* $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{2\ln(2)-1} = \dfrac{4}{e}.$

R 6 *On a* $(X_1 \geq k) = \bigcup_{i=k}^{n-1}(X_1 = i)$ *donc* $P(X_1 \geq k) = \sum_{i=k}^{n-1} P(X_1 = i) = (n-k)\times\dfrac{1}{n}.$
On a $Y_{n,p} \geq k \Leftrightarrow \forall i \in [[1,p]],\ X_i \geq k$ *donc* $(Y_{n,p} \geq k) = \bigcap_{i=1}^{p}(X_i \geq k)$ *donc* $P(Y_{n,p} \geq k) = \left(\dfrac{n-k}{n}\right)^p.$

R 7 $E(Y_{n,p}) = \sum_{k=1}^{n-1} P(Y_{n,p} \geq k) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{n-k}{n}\right)^p = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{k}{n}\right)^p = n\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{k}{n}\right)^p\right).$
Posons $f(x) = x^p$ *et* $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{k}{n}\right)^p$ *la somme de Riemann à gauche associée à* f *sur* $[0,1]$
On a donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 x^p dx = \left[\dfrac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{p+1}$ *donc* $E(Y_{n,p}) \sim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{p+1}$

R 8 *On a* $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k\pi}{n^2}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k\pi}{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ *avec* $f : x \mapsto x\sin(x)$ *qui est continue sur* $[0,\pi]$ *Si* $a = 0$ *et* $b = \pi$*, on a* $R_n = \dfrac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) = \pi v_n$ *donc* $\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin(x)\,dx = 1$ *(faire une IPP pour faire disparaitre* x *de l'intégrale)*
On a $|u_n - v_n| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k\pi}{n^2}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left(\sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right) - \frac{k\pi}{n^2}\right)\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right) - \frac{k\pi}{n^2}\right|$
donc $|u_n - v_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right) - \frac{k\pi}{n^2}\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)^3}{6} \leq \dfrac{\pi^3}{6}\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{n^3}$ *car* $\dfrac{k}{n^2} \leq \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$ *donc* $|u_n - v_n| \leq \dfrac{\pi^3}{6n^2}$*. On en déduit que la suite* $(u_n - v_n)$ *converge vers* 0 *donc la suite* (u_n) *converge vers* π^2*.*

Exercice 3:

1. $(\Rightarrow)$: Supposons $M = (C_1|\cdots|C_n) \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R})$.
   il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ soit, $(\lambda C_1|\cdots|\lambda C_n)$ est une BON. Or $\|C_i\| = \sqrt{1+\cdots+1} = \sqrt{n}$ donc $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ou .$\lambda = \dfrac{-1}{\sqrt{n}}$
   mais l'opposé d'une matrice orthogonale étant orthogonale, si $\dfrac{-1}{\sqrt{n}}M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors $\dfrac{1}{\sqrt{n}}M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
   $(\Leftarrow)$ Rien à faire

2. Si $n=2$, il y a quatre vecteur colonne de $X_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $X_2=-X_1$, $X_3=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $X_4=-X_3$ dont les coefficients sont dans $\{-1,1\}$.
Pour qu'une matrice $(C_1|C_2)$ soit une matrice d'Hadamard de taille 2, il faut et il suffit que C_1 et C_2 appartiennent à $\{X_i, i\in[[1,4]]\}$ et $C_1\perp C_2$.
c'est-à-dire
$C_1\in\{X_i, i\in\{1,2\}\}$ et $C_2\in\{X_i, i\in\{3,4\}\}$
ou
$C_1\in\{X_i, i\in\{3,4\}\}$ et $C_2\in\{X_i, i\in\{1,2\}\}$.
(ce qui donne 8 résultats possibles).

3. $\mathcal{H}_n$ est contenu dans l'ensemble $\mathcal{E}_n$ des matrices à coefficients dans $\{0,1\}$.
La donnée d'une matrice de $\mathcal{E}_n$ revient à la donnée de la liste de ses n^2 coefficients dans $\{0,1\}$. On en déduit que $card\,(\mathcal{E}_n)=2^{n^2}$ donc $\mathcal{H}_n$ est fini et $card\,(\mathcal{H}_n)\le 2^{n^2}$.

4. $A\in\mathcal{H}_n$ donc $M=\left(\begin{array}{c|c}A&A\\\hline -A&A\end{array}\right)$ est à coefficients dans $\{-1,1\}$.
De plus $\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}M\right)^T\times\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}M\right)=\frac{1}{2n}\left(\begin{array}{c|c}A&A\\\hline -A&A\end{array}\right)^T\times\left(\begin{array}{c|c}A&A\\\hline -A&A\end{array}\right)$
$=\frac{1}{2n}\left(\begin{array}{c|c}A^T&-A^T\\\hline A^T&A^T\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}A&A\\\hline -A&A\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}\frac{1}{n}A^TA&0\\\hline 0&\frac{1}{n}A^TA\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}I_n&0\\\hline 0&I_n\end{array}\right)$ donc $M\in H_{2n}$.

5. Soit $M\in GL_n(\mathbb{R})$. On souhaite montrer l'existence de R orthogonale et S symétrique définie positive telle que $M=RS$.

   (a) On a $M^TM=(RS)^T(RS)=S^T\left(R^TR\right)S=S^2$ car $R\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

   (b) On a, pour $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^TM^TMX=(MX)^T(MX)=\|MX\|^2\ge 0$.De plus, si $X\neq 0$, alors $MX\neq 0$ car M est inversible donc $\|MX\|^2>0$ donc $X^TM^TMX>0$. On a donc$M^TM\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

   (c) Posons $A=M^TM\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le th spectral, $\exists P\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tq $D=P^{-1}AP=P^TAP$ soit diagonale. On a $sp\,(A)=sp\,(D)\subset\mathbb{R}_+^*$ d'après la question précédente et $sp\,(D)=\{d_{i,i}, i\in[[1,n]]\}$ donc $d_{i,i}>0$.
   Soit la matrice diagonale $\Delta=\begin{pmatrix}\sqrt{d_{1,1}}&&0\\&\ddots&\\0&&\sqrt{d_{1,1}}\end{pmatrix}$. On a $\Delta^2=D$. Posons $S=P\Delta P^{-1}$. On a $S^2=\left(P\Delta P^{-1}\right)^2=P\Delta^2P^{-1}=A$. De plus $P\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et Δ est diagonale donc symétrique donc S est symétrique. Les matrices Δ et S sont semblables donc $sp\,(S)=sp\,(\Delta)=\left\{\sqrt{d_{i,i}}\right\}\subset\mathbb{R}_+^*$ donc $S\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A=M^TM=S^2$.

   (d) $\det(M)=\det\left(S^2\right)=\det(S)^2$ et M inversible donc $\det(S)\neq 0$ donc S est inversible.
   On a $(MS^{-1})^TMS^{-1}=\left(S^{-1}\right)^TM^TMS^{-1}=\left(S^{-1}\right)^TS^2S^{-1}=\left(S^{-1}\right)^TS$.
   Or $\left(S^{-1}\right)^T=\left(S^T\right)^{-1}=S^{-1}$ car S est symétrique donc (l'inverse d'une matrice symétrique inversible est symétrique) donc $(MS^{-1})^TMS=I_n$ donc $\boxed{MS^{-1}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$

   (e) En posant $R=MS^{-1}$, on a $M=RS$ avec $R\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

   (f) Si $M=RS$ on a vu que $S^2=M^TM$. On a vu l'existence de $S\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
   Montrons l'unicité de $S\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S^2=M^TM=A$.
   Posons $sp\,(S)=\{\mu_1,\ldots,\mu_k\}$
   D'après le théorème spectral, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})=\oplus_{i=1}^kE_{\mu_i}(S)$.
   Or $E_{\mu_i}(S)\subset E_{\mu_i^2}(A)$ et $i\neq j\Rightarrow\mu_i^2\neq\mu_j^2$ donc $n=\sum\limits_{i=1}^k\dim\left(E_{\mu_i}(S)\right)\le\sum\limits_{i=1}^k\dim\left(E_{\mu_i^2}(A)\right)\le n$.
   On en déduit que pour tout i, $E_{\mu_i}(S)=E_{\mu_i^2}(A)$, ce qui détermine les sous-espaces propres et les valeurs propres de S en fonction de celles de A de manière unique.
   Comme S est diagonalisable, elle est entièrement déterminée par ses sous-espaces propres et ses valeur propres. On a donc l'unicité de S.
   Or $M=RS\Rightarrow R=MS^{-1}$, ce qui entraîne l'unicité de R.

6. Soit $\Sigma\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n ses valeurs propres comptées avec multiplicité, D la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont, dans l'ordre, λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n et $Q\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

   (a) La matrice Σ est symétrique réelle donc diagonalisable et est donc semblable à D donc Σ ont la même trace car elles sont semblables donc $tr(\Sigma)=tr\,(D)=\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i$.

(b) La matrice Σ est symétrique réelle donc $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tq $D = P^{-1}\Sigma P$. $\Sigma = PDP^{-1} \Rightarrow Q\Sigma = QPDP^{-1} \Rightarrow tr(Q\Sigma) = tr(QPDP^{-1}) = tr(P^{-1}QPD)$.
Posons $Q' = P^{-1}QP$. Les matrices P et Q sont orthogonales donc Q' aussi car $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit et inverse et on a $\underline{tr(Q\Sigma) = tr(Q'D)}$.
Les éléments diagonaux de $Q'D$ sont les réels $q^{'}_{i,i}\lambda_i$ car la matrice D est diagonale donc $|tr(Q'D)| = \left|\sum\limits_{i=1}^{n} q^{'}_{i,i}\lambda_i\right| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \left|q^{'}_{i,i}\right| |\lambda_i|$.
La matrice Q' étant orthogonale, la $j^{ème}$ colonne est de norme 1 donc $\sum\limits_{j=1}^{n} \left(q'_{j,i}\right)^2 = 1$ donc $\left|q^{'}_{i,i}\right| \leq 1$ et pour tout i , $\lambda_i \geq 0$ donc $\left|q^{'}_{i,i}\right| |\lambda_i| \leq \lambda_i$ donc $|tr(Q'D)| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$ d'où

$$|tr\,(Q\Sigma)| \leq tr\,(\Sigma)$$

(c) On a $|tr\,(Q\Sigma)| \leq tr\,(\Sigma)$ pour tout $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $\sup\limits_{Q\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} |tr\,(Q\Sigma)| \leq tr\,(\Sigma)$. De plus, pour $Q = I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $|tr\,(Q\Sigma)| = tr\,(\Sigma)$ donc $\sup\limits_{Q\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} |tr\,(Q\Sigma)| = tr\,(\Sigma)$ (et la borne supérieure est un maximum).

7. Soit $n \in E$. Pour toute matrice $A = (a_{i,j})$ de H_n, on pose :

$$f\,(A) = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$$

(a) L'ensemble H_n est fini donc $\{f\,(A)\,,\ A \in \mathcal{H}_n\}$ est aussi fini donc admet un maximum.

(b) On a $f\,(A) = \sum\limits_{1\leq i\leq k\leq n} a_{i,k} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{k=i}^{n} a_{i,k}\right)$. Définissons T telle que $\sum\limits_{j=i}^{n} a_{i,j}$ soit le coefficient i,i de $B = AT$.
On a $b_{i,i} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}t_{k\,i}$. On pose donc $t_{k\,i} = 1$ si $k \geq i$ et $t_{k\,i} = 0$ et on a bien $tr\,(AT) = tr(B) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=i}^{n} a_{i,k} = f(A)$.

(c) On a $\det(T) = 1$ donc $T \in GL_n(\mathbb{R})$. D'après 2) $\exists R \in O_n$ et $S \in S_n^{++}$ tq $T = RS$.
On a alors $f(A) = tr(ARS)$ et $A \in \mathrm{H}_n$ donc $A' = \frac{1}{\sqrt{n}}A \in \mathcal{O}_n\,(\mathbb{R})$.
On en déduit que $f(A) = tr(\sqrt{n}A'RS) = \sqrt{n}tr(A'RS)$. Or $A'R \in \mathcal{O}_n\,(\mathbb{R})$ car $\mathcal{O}_n\,(\mathbb{R})$ est stable par produit et $S \in S_n^{+}$ donc d'après **Q6** $f(A) \leq \sqrt{n}Tr(S)$. Cela est vrai $\forall A \in \mathrm{H}_n$ donc $\boxed{\alpha_n \leq \sqrt{n}Tr(S)}$.

(d) On a déterminé précédement H_2, et on peut en déduire que $\forall A \in \mathcal{H}_2$, $f(A) \in \{-3, -1, 1, 3\}$ donc $\boxed{\alpha_2 = 3}$.
D'après **Q5** $Tr(S) = \sqrt{d_1} + \sqrt{d_2}$ où d_1 et d_2 sont les valeurs propres de ${}^tTT = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Le polynôme caractéristique de cette matrice est $X^2 - 3X + 1$ donc $d_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$ et $d_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$ d'où $Tr(S) = \sqrt{5}$. On a bien $3 < \sqrt{2}\sqrt{5}$ (car $9 < 10$).