PSI DS5, le 8 janvier 2025 durée 3h

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet comporte 4 pages

Les calculatrices sont interdites

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Problème 1:

Le but de ce problème est de démontrer et utiliser plusieurs critères pour prouver qu'une matrice symétrique réelle est définie positive. On rappelle que, pour un entier naturel non nul n, une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *définie positive* si et seulement si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^T M X > 0.$$

Caractérisation spectrale

Q 1 *Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle pour que celle-ci soit définie positive.*

Q 2 *Application : Démontrer que le polynôme $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$ admet trois racines réelles distinctes (on ne cherchera pas à les déterminer).*

Démontrer alors que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est définie positive grâce à la caractérisation spectrale.

Un critère en dimension 2

Dans cette partie, on souhaite démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si sa trace et son déterminant sont strictement positifs.

Q 3 *Démontrer qu'une matrice définie positive M de taille quelconque vérifie toujours $tr(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.*

Q 4 *Démontrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont la trace et le déterminant sont strictement positifs, est définie positive.*

Q 5 *Dans cette question, n est quelconque. Une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont la trace et le déterminant sont strictement positifs est elle nécessairement définie positive?*

Le critère de Sylvester

Dans cette partie, on étudie le *critère de Sylvester*, valable en toute dimension.
Pour une matrice carrée quelconque $M = (m_{i,j})_{i,j \in [[1,n]]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier $k \in [[1,n]]$, on définit le *k-ième mineur principal* comme étant le déterminant de la matrice $M_k = (m_{i,j})_{i,j \in [[1,k]]} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.
On précise qu'une matrice carrée de taille n possède n mineurs principaux.

Par exemple, les trois mineurs principaux de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ de la **question Q2.** sont les déterminants des matrices $B_1 = (1)$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B_3 = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On dit qu'une matrice vérifie le critère de Sylvester si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.
On souhaite alors démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si elle vérifie le critère de Sylvester.

Par exemple, pour la matrice B de la **question Q2.**, on constate que :

$$\det(B_1) = 1 > 0, \quad \det(B_2) = 2 > 0, \quad \det(B_3) = 3 > 0.$$

La matrice B vérifie le critère de Sylvester, elle est donc définie positive.

Q 6 *On fixe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $k \in [[1,n]]$, et un vecteur colonne $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.*

Déterminer un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, tel que :

$$X_k^T M_k X_k = X^T M X.$$

Q 7 *Démontrer que toute matrice symétrique réelle définie positive vérifie le critère de Sylvester.*

Dans les trois questions suivantes, il s'agit de démontrer la réciproque, c'est-à-dire que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.
Pour cela, on va raisonner par récurrence sur la taille n de la matrice.

Q 8 *Soit $n \geqslant 2$ et soit une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que* $\det(M) > 0$.
On écrit cette matrice par blocs sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^T & \alpha \end{pmatrix} \qquad \textit{avec} \qquad M_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \qquad \textit{et} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

On suppose que la matrice M_{n-1} est définie positive.
Justifier l'existence d'un vecteur colonne $V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que $M_{n-1}V + U = 0$.

Q 9 *En notant $Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$, démontrer alors que $Q^T M Q$ s'écrit par blocs $\begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}$ avec $\beta > 0$.*

Q 10 *Démontrer par récurrence que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.*

Q 11 *Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la matrice $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ?*

Q 12 *La matrice* $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est-elle définie positive ? Justifier.*

Q 13 *Démontrer que pour tout* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$: $4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0$.

Q 14 *Pour quelles valeurs de* $n \in \mathbb{N}^*$ *la matrice* $\mathcal{S}_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est-elle définie positive ?*

Problème 2: Les urnes de Pólya

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire;

2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n-ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n-ième tirage dans un cas particulier. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n-ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

On rappelle que si E et F sont deux événements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $P(E|F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$P(E|F) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Partie I : Préliminaires

Q 15 *Déterminer la loi de* X_1.

Q 16 *Quelle est la loi conditionnelle de* X_2 *sachant l'événement* $(X_1 = 1)$*?*
Quelle est la loi conditionnelle de X_2 *sachant l'événement* $(X_1 = 0)$*?*
Déterminer la loi de X_2.

Q 17 *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Que représente la variable aléatoire* S_n *? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire* S_n *?*

Partie II : La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 18 *Pour tout* $k \in [[b, n+b]]$, *calculer* $P(X_{n+1} = 1 | S_n = k)$.

Q 19 *En déduire, à l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que :*

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{b+r+n}.$$

Q 20 *Montrer par récurrence que* X_n *suit la loi de Bernoulli de paramètre* $\frac{b}{b+r}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III : La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 21 *Exprimer l'événement* $(S_n = 1)$ *avec les événements* $(X_k = 0)$ *pour* $k \in [\![1, n]\!]$.

Q 22 *Montrer que* $P(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $P(S_n = n+1) = \frac{1}{n+1}$.

Q 23 *Soit* $(k, \ell) \in [[1, n+2]] \times [[1, n+1]]$. *Calculer la probabilité* $P(S_{n+1} = k | S_n = \ell)$ *dans chacun des trois cas suivants :*

$$(i)\ \ell \notin \{k-1, k\}, \qquad (ii)\ \ell = k-1, \qquad (iii)\ \ell = k.$$

Q 24 *Montrer que pour tout* $k \in [\![2, n+1]\!]$, *on a la relation :*

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k).$$

Q 25 *Montrer par récurrence que* S_n *suit la loi uniforme sur* $[\![1, n+1]\!]$.

Exercice 2: Décomposition d'un entier en somme d'entiers

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n^p le nombre de listes $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $i_1 + \cdots + i_n = p$.

Q 26 *Déterminer* S_n^0, S_n^1, S_n^2, S_1^p, S_2^p.

Q 27 *Exprimer* S_{n+1}^p *en fonction des* S_n^i. *En déduire que* $S_n^p = \binom{n+p-1}{p}$.

PSI DS4 CORRECTION

Problème 1:

Caractérisation spectrale

R 1 *C'est une question de cours (voir cours)*

R 2 *Soit* $P = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$. *On a* $P' = 3X^2 - 12X + 9 = 3(X^2 - 4X + 3) = 3(X-1)(X-3)$.
Etablissons le tableau de variation de P :

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$P'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

On observe que $P(0) < 0$, $P(1) > 0$, $P(3) < 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$, *et* P *est une fonction polynomiale donc continue sur* $\mathbb{R}$. *Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur* $[0,1]$, $[1,3]$ *et* $[3,+\infty[$, *le polynôme* P *admet trois racines réelles distinctes appartenant respectivement aux intervalles* $]0,1[$, $]1,3[$ *et* $]3,+\infty[$.
Donc le polynôme P *admet trois racines réelles distinctes et strictement positives.*

Calculons le polynôme caractéristique de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \chi_B(X) &= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} &=& (X-1)(X-2)(X-3) - (X-1) - (X-2) \\ &= (X^3 - 6X^2 + 11X - 6) - 2X + 3 &=& X^3 - 6X^2 + 9X - 3 = P(X). \end{aligned}$$

Puisque $\chi_B = P$, *le spectre de* B, *qui est l'ensemble des racines de* χ_B, *est l'ensemble des racines de* P, *qui sont trois réels strictement positifs.*
Donc d'après la caractérisation spectrale B *est définie positive.*

Un critère en dimension 2

R 3 M *est symétrique réelle donc diagonalisable Soit* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *ses valeurs propres comptées avec multiplicité..*
D'après la caractérisation spectrale, on a $sp(M) \subset \mathbb{R}_+^*$, *donc* $\forall k \in [[1,n]]\,,\ \lambda_k > 0$.
Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ *et* $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *diagonale réelle, telles que* $P^{-1}AP = D$.
Puisque M *et* D *sont semblables, elles ont même trace et même déterminant :*

$$tr(M) = tr(D) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\lambda_k}_{>0} > 0. \quad \det(M) = \det(D) = \prod_{k=1}^{n} \underbrace{\lambda_k}_{>0} > 0.$$

R 4 *Soit* $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique réelle vérifiant* $tr(M) > 0$ *et* $\det(M) > 0$.
Par le théorème spectral, puisque M *est symétrique réelle,* M *est diagonalisable en base orthonormée.*
Donc M *possède deux valeurs propres réelles comptées avec multiplicités, notées* λ_1 *et* λ_2.
De plus M *est semblable à la matrice diagonale* $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
Puisque M *et* D *sont semblables, elles ont même trace et même déterminant.*
D'une part, $\det(M) = \det(D) = \lambda_1\lambda_2 > 0$, *donc* λ_1 *et* λ_2 *sont non nulles et de même signe.*
D'autre part, $tr(M) = tr(D) = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$ *donc* λ_1 *et* λ_2 *sont strictement positives.*
D'après la caractérisation spectrale M *est définie positive.*

R 5 *Soit la matrice diagonale* $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

D est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et vérifie $tr(D) = 1 > 0$ et $\det(D) = 3 > 0$.
Mais le spectre de D, $sp(D) = \{3, -1\}$ n'est pas inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
D'après la caractérisation spectrale, D n'est pas définie positive.

Le critère de Sylvester

R 6 *Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un entier $k \in [[1, n]]$, et $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On suppose de plus $\boxed{X_k \neq 0.}$*

Déterminons un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, tel que : $\quad X_k^T M_k X_k = X^T M X$.
Si $k = n$. *On pose $X = X_n$ (non nul si X_n non nul.) On a $M_n = M$ et $X_n = X$, d'où le résultat.*
Si $k < n$. *On pose $X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0 \end{pmatrix}$ On écrit la matrice M par blocs :*

$$M = \begin{pmatrix} M_k & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{rcl} M_k & \in & \mathcal{M}_k(\mathbb{R}), \\ B & \in & \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{R}), \\ C & \in & \mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{R}), \\ D & \in & \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R}). \end{array} \right.$$

Un produit matriciel par blocs donne :
$X^T M X = \begin{pmatrix} X_k^T & 0^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_k^T & 0^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k X_k \\ C X_k \end{pmatrix} = X_k^T M_k X_k.$

R 7 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle définie positive.*
Soit $k \in [[1, n]]$. La sous-matrice $M_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ est symétrique réelle.
Soit $X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. D'après la question précédente, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que

$$X_k^T M_k X_k = X^T M X.$$

Puisque M est définie positive et $X \neq 0$, on a $X^T M X > 0$.
On en déduit que $\forall X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X_k^T M_k X_k > 0$.
Donc la matrice M_k est définie positive.
*D'après la question **Q3**, cette matrice vérifie $\det(M_k) > 0$.*
On a montré que $\forall k \in [[1, n]]$, $\det(M_k) > 0$ donc M vérifie le critère de Sylvester.

R 8 *Soit $n \geqslant 2$ et soit une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) > 0$.*
On écrit cette matrice par blocs sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^T & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

On suppose que la matrice M_{n-1} est définie positive donc $\det(M_{n-1}) > 0$, donc M_{n-1} est inversible.
En posant $V = -(M_{n-1})^{-1} U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, on a $M_{n-1}V + U = 0$.

R 9 *En transposant cette égalité et en utilisant que M_{n-1} est symétrique, on a également $V^T M_{n-1} + U^T = 0$.*
Notons $Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} Q^T M Q &= Q^T \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^T & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix} &&= Q^T \begin{pmatrix} M_{n-1} & M_{n-1}V + U \\ U^T & U^T V + \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ U^T & U^T V + \alpha \end{pmatrix} &&= \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^T M_{n-1} + U^T & U^T V + \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & U^T V + \alpha \end{pmatrix}. &&= \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $\beta = U^T V + \alpha$.
De plus, puisque $\det(Q) = 1$*, on a*

$$\beta \det(M_{n-1}) = \det(Q^T M Q) = \det(Q)^2 \det(M) = \det(M) > 0.$$

Or $\det(M_{n-1}) > 0$*, donc* $\beta > 0$.

R 10 *Montrons par récurrence sur* $n \geqslant 1$ *que toute matrice symétrique réelle* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.*
Initialisation. Cas $n = 1$**.**
Soit $M = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ *(toujours symétrique) vérifiant le critère de Sylvester.c'est-à-dire* $a = \det(M) > 0$*. Or* $sp\,(M) = \{a\} \subset \mathbb{R}_+^*$ *donc* M *est définie positive.*
Hérédité. *Supposons le résultat vrai au rang* $(n-1)$ *et montrons-le au rang* n*.*
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *une matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester. Alors tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.*
On reprend les notations de la question précédente:

$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^T & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Puisque M *est symétrique réelle,* M_{n-1} *est également symétrique réelle.*
Les $(n-1)$ *mineurs principaux de* M_{n-1} *sont aussi des mineurs principaux de* M*, donc sont strictement positifs, ce qui montre que* <u>M_{n-1} *vérifie aussi le critère de Sylvester.*</u>
Par hypothèse de récurrence appliquée au rang $(n-1)$*,* <u>*la matrice* M_{n-1} *est définie positive.*</u>
D'après la question précédente, il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *de déterminant* $\det(Q) = 1$ *telle que*

$$Q^T M Q = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix} \text{ avec } \beta > 0.$$

Montrons que $Q^T M Q$ *est définie positive.*
Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$*, que l'on écrit* $Y = \begin{pmatrix} Z \\ z \end{pmatrix}$ *avec* $Z \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ *et* $z \in \mathbb{R}$*. Un calcul par blocs donne :*

$$Y^T (Q^T M Q) Y = \begin{pmatrix} Z^T & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z^T & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} Z \\ \beta z \end{pmatrix} = Z^T M_{n-1} Z + \beta z^2.$$

Si $Z \neq 0$*, puisque* M_{n-1} *est définie positive, on a* $Z^T M_{n-1} Z > 0$ *donc*

$$Y^T (Q^T M Q) Y \geqslant Z^T M_{n-1} Z > 0.$$

Si $Z = 0$ *alors* $z \neq 0$ *(car* $Y \neq 0$*). Il vient*

$$Y^T (Q^T M Q) Y = \beta z^2 > 0 \text{ car } \beta > 0 \text{ et } z \neq 0.$$

Dans les deux cas, $Y^T (Q^T M Q) Y > 0$*. Donc* <u>*la matrice* $Q^T M Q$ *est définie positive.*</u>
Nous allons en déduire que M *est définie positive*
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$*.*
Puisque $\det(Q) = 1$*, la matrice* Q *est inversible. On pose* $Y = Q^{-1} X \neq 0$ *car* $X \neq 0$*.*
Puisque $Q^T M Q$ *est définie positive :*

$$X^T M X = (QY)^T M (QY) = Y^T (Q^T M Q) Y > 0.$$

Donc <u>*la matrice* M *est définie positive,*</u> *ce qui termine la récurrence.*

R 11 *Soit $x \in \mathbb{R}$. La matrice $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle. Calculons les mineurs principaux de $C(x)$.*

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} \det(C_1(x)) & = & \det(2) & = & 2 \quad > 0. \\ \det(C_2(x)) & = & \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & = & 1 \quad > 0. \\ \det(C_3(x)) & = & \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} & = & 1 - 2x^2. \end{array} \right.$$

Donc $C(x)$ vérifie le critère de Sylvester si et seulement si $\det(C_3(x)) > 0$. Or

$$\det(C_3(x)) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[.$$

D'après le critère de Sylvester, C est définie positive si et seulement si $x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$.

R 12 *Posons*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est symétrique réelle. Calculons les mineurs principaux de A.

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} \det(A_1) & = & \det(2) & = & 2 > 0. \\ \det(A_2) & = & \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & = & 2 > 0. \\ \det(A_3) & = & \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & = & 2 \times 2 - 2 \times 3 - 5 = -7 < 0. \end{array} \right.$$

(On a développé $\det(A_3)$ selon la première colonne.)
Le troisième mineur principal est strictement négatif donc A n'est pasdéfinie positive

R 13 *Posons*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

On a

$$\begin{array}{lclcl} X^T A X & = & \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4x + y - \frac{3}{2} z \\ x + y \\ -\frac{3}{2} x + z \end{pmatrix} \\ & = & x\left(4x + y - \frac{3}{2}z\right) + y(x+y) + z\left(-\frac{3}{2}x + z\right) & = & 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz. \end{array}$$

La matrice A est symétrique réelle. Calculons les mineurs principaux de A.

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} \det(A_1) & = & \det(4) & = & 4 > 0. \\ \det(A_2) & = & \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & = & 3 > 0. \\ \det(A_3) & = & \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & = & -\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{4} > 0. \end{array} \right.$$

Puisque A est définie positive, on a :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^T A X = 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0.$$

R 14 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \det(S_n)$. En développant le déterminant de S_n par rapport à la dernière colonne, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geqslant 3, \quad u_n = \det(S_n) = \sqrt{3}\det(S_{n-1}) - \det(S_{n-2}) = \sqrt{3}u_{n-1} - u_{n-2}.$$

On a de plus :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_1 = \det(S_1) & = & \det(\sqrt{3}) & = \sqrt{3}. \\ u_2 = \det(S_2) & = & \det \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} & = 2. \end{array} \right.$$

La suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, définie par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \forall n \geqslant 1, \quad u_{n+2} - \sqrt{3}u_{n+1} + u_n & = & 0. \\ u_1 & = & \sqrt{3}. \\ u_2 & = & 2. \end{array} \right.$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 - \sqrt{3}r + 1 = 0$. On a $\Delta = -1 < 0$ ce qui donne deux racines distinctes complexes non réelles :

$$r_1 = e^{i\pi/6} \qquad \text{et } r_2 = e^{-i\pi/6}.$$

Puisque la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est réelle, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = a\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + b\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right).$$

On trouve (a, b) grâce aux valeurs de u_1 et u_2 :

$$\left\{ \begin{array}{rcccccl} u_1 & = & \sqrt{3} & = & a\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & = & a\frac{\sqrt{3}}{2} + b\frac{1}{2}. \quad u_2 \; = \\ u_2 & = & 2 & = & a\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & = & a\frac{1}{2} + b\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3a + b\sqrt{3} & = & 6. \\ a + b\sqrt{3} & = & 4. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1. \\ b & = & \sqrt{3}. \end{array} \right.$$

Finalement,

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{\det(S_n) = u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right).}$$

On peut en particulier calculer les premiers termes de la suite :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \det(S_1) & = & \sqrt{3} & > 0. \\ \det(S_2) & = & 2 & > 0. \\ \det(S_3) & = & \sqrt{3} & > 0. \\ \det(S_4) & = & 1 & > 0. \\ \det(S_5) & = & 0. & \end{array} \right.$$

La matrice S_n est symétrique réelle. Les mineurs principaux de S_n sont les $\det(S_k)$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$.
Si $n \in [[1,4]]$, les mineurs principaux de S_n sont tous strictement positifs. Par le critère de Sylvester, S_n est définie positive.
Si $n \geqslant 5$, le cinquième mineur principal est nul : $\det(S_5) = 0$. Par le critère de Sylvester, S_n n'est pas définie positive.

Problème 2: Les urnes de Polya (CCINP PC 2021)

Partie I: Préliminaires

R 15 *$X_1(\Omega)) = \{0,1\}$. Il y a au départ b boules blanches sur un total de $b+r$ boules dans l'urne, et équiprobabilité de tirage de chaque boule donc $P(X_1 = 1) = \dfrac{b}{b+r}$ donc $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{b}{b+r}\right)$.*

R 16 *$P(X_2 = 1|X_1 = 1)$ est la probabilité du tirage d'une boule blanche dans une urne contenant $b+1$ blanches sur un total de $b+r+1$ boules donc $P(X_2 = 1|X_1 = 1) = \dfrac{b+1}{b+r+1}$.*
De même $P(X_2 = 0|X_1 = 1) = \dfrac{r}{b+r+1}$ (tirage d'une boule rouge d'une urne contenant r rouges sur un total de $b+r+1$ boules).
La loi conditionnelle de X_2 sachant $(X_1 = 1)$ est une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b+1}{b+r+1}$.
Ensuite $X_2(\Omega) = \{0,1\}$. La formule des probabilités totales avec le s.c.e $((X_1 = 1), (X_1 = 0))$ donne

$$P(X_2 = 1) = P(X_2 = 1|X_1 = 1)P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1|X_1 = 0)P(X_1 = 0)$$

*De même que précédemment, $P(X_2 = 1|X_1 = 0) = \dfrac{b}{b+r+1}$, ainsi avec **Q 15***
$P(X_2 = 1) = \dfrac{b+1}{b+r+1}\dfrac{b}{b+r} + \dfrac{b}{b+r+1}\dfrac{r}{b+r} = \dfrac{b}{b+r}$ donc $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{b}{b+r}\right)$.

R 17 *$X_1 + \cdots + X_n$ est le nombre de boules blanches tirées, donc ajoutées lors des n premiers tiranges donc $S_n = b + X_1 + \cdots + X_n$ est le nombre de boules blanches après le n ème tirage, et vu qu'il y a au départ b boules blanches et qu'à chaque tirage on peut éventuellement ajouter une boule blanche, $S_n(\Omega) = [[b, b+n]]$.*

Partie II: La loi de X_n

R 18 *Après chaque tirage on ajoute une boule donc le nombre total de boule après n tirages est $b+r+n$.*
$P(X_{n+1} = 1|S_n = k)$ est la probabilité de tirer une boule blanche dans une urne contenant k boules blanches sur un total de $b+r+n$ boules.donc

$$P(X_{n+1} = 1|S_n = k) = \frac{k}{b+r+n}$$

R 19 *Appliquons la formule des probabilités totales avec le s.c.e $((S_n = k)_{b \leq k \leq n+b})$*
*$P(X_{n+1} = 1) = \sum\limits_{k=b}^{n+b} P(X_{n+1} = 1|S_n = k)P(S_n = k)$, donc avec le résultat de **Q 18***
$P(X_{n+1} = 1) = \sum\limits_{k=b}^{n+b} \dfrac{k}{b+r+n} P(S_n = k) = \dfrac{1}{b+r+n}\sum\limits_{k=b}^{n+b} kP(S_n = k) = \dfrac{1}{b+r+n}E(S_n)$.

R 20 *Montrons par récurrence (forte) sur $n \in \mathbb{N}^*$ que X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.*
***Initialisation:** $n = 1$. C'est vrai par la **Q 15**.*
***Hérédité:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, supposons la propriété vraie jusqu'au rang n.(HR).*

On a $S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k$ *donc* $E(S_n) = E\left(b + \sum_{k=1}^{n} X_k\right) = b + \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$ *par linéarité de l'espérance et donc (HR),* $E(S_n) = b + n\dfrac{b}{b+r} = b\dfrac{b+r+n}{b+r}$.
Or d'après ***Q 19***, $P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{b+r+n}E(S_n)$ *donc* $P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{b}{b+r}$. *Or* $X_{n+1}(\Omega)) = \{0,1\}$ *donc* $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{b}{b+r}\right)$
Conclusion : Par principe de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III: La loi de S_n dans un cas particulier

R 21 *Vu que* $b = 1$, $S_n = 1$ *correspond à "on n'a tiré que des boules rouges aux* n *premiers tirages", soit*

$$(S_n = 1) = (X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap \cdots \cap (X_n = 0).$$

R 22 *Les évènements* $(X_k = 0)$ *ne sont pas indépendants. La formule des probabilités composées donne :*

$$P((X_1 = 0)\cap(X_2 = 0)\cap\cdots\cap(X_n = 0)) = P(X_1 = 0)\times P_{(X_1=0)}(X_2 = 0)\times\cdots\times P_{(X_1=0)\cap(X_2=0)\cap\cdots\cap(X_{n-1}=0)}(X_n = 0).$$

Encore une fois ces probabilités conditionnelles s'interprètent :
$P(X_1 = 0) = \dfrac{1}{2}$, $P(X_2 = 0|X_1 = 0) = \dfrac{2}{3}, \ldots,$
$P_{(X_1=0)\cap(X_2=0)\cap\cdots\cap(X_{k-1}=0)}(X_k = 0) = \dfrac{k}{k+1}$ *car après* $k-1$ *tirages, si on a tiré que des boules rouges, il y a* $k+1$ *boules dont* k *boules rouges.*
et $P_{(X_1=0)\cap(X_2=0)\cap\cdots\cap(X_{n-1}=0)}(X_n = 0) = \dfrac{n}{n+1}$ *donc*
$P(S_n = 1) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\cdots\times\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

R 23 *On a* $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ *et* $X_{n+1} = 0$ *ou* $X_{n+1} = 1$ *donc si* $S_{n+1} = k$, *alors* $S_n = k$ *ou* $S_n = k-1$ *donc* $P(S_{n+1} = k|S_n = l) = 0$ *si* $l \notin \{k-1, k\}$.
$P(S_{n+1} = k|S_n = k-1) = \dfrac{k-1}{n+2}$: *tirage d'une boule blanche dans une urne de* $n+2$ *boules dont* $k-1$ *sont blanches dont on tire une boule blanche.*
$P(S_{n+1} = k|S_n = k) = \dfrac{n+2-k}{n+2}$: *tirage d'une boule rouge dans une urne de* $n+2$ *boules dont* k *sont blanches, donc* $n+2-k$ *rouges.*

R 24 *On applique la formule des probabilités totales s.c.e* $((S_n = \ell))_{1\leq\ell\leq n+1}$ *dans laquelle seuls deux termes sont non nuls d'après* ***Q 23***.

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{l=1}^{n+1} P(S_{n+1} = k|S_n = l) + (S_n = l) = \frac{k-1}{n+2}P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2}P(S_n = k).$$

R 25 *Montrons par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}^*$ *que* S_n *suit une loi uniforme sur* $[[1, n+1]]$.
Initialisation: $S_1(\Omega) = [[1, 2]]$, *et :* $(S_1 = 1) = (X_1 = 0)$, *donc avec* ***Q 15*** $P(S_1 = 1) = P(X_1 = 0) = \dfrac{1}{2}$.
$(S_1 = 2) = (X_1 = 1)$, *donc avec* ***Q 15*** $P(S_1 = 1) = P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$.
Donc X_1 *suit bien une loi uniforme sur* $[[1, 2]]$.
Hérédité : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Supposons que* S_n *suit une loi uniforme sur* $[[1, n]]$.

*D'abord $S_{n+1}(\Omega) = [[1, n+2]]$ par **Q 17**.et d'après **Q 22**, $P(S_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{n+2}$ et $P(S_{n+1} = n+2) = \dfrac{1}{n+2}$.*
*L'hypothèse de récurrence et la **Q 24** donnent, pour $k \in [[2, n+1]]$,*

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2}\frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2}.$$

Ainsi S_{n+1} suit une loi uniforme sur $[[1, n+2]]$.
Conclusion : Le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par principe de récurrence.

Exercice 1: Décomposition d'un entier en somme d'entiers

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n^p le nombre de listes $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $i_1 + \cdots + i_n = p$.

R 26 *Le seul moyen que $i_1 + \cdots + i_n = 0$ est $i_1 = \cdots = i_n = 0$ donc $S_n^0 = 1$.*
On a $i_1 + \cdots + i_n = 1$ si et seulement si tous les i_k sont nuls sauf 1 qui vaut 1 et qui peut être dans l'une quelconque des n positions possibles donc $S_n^1 = n$.
On a $i_1 + \cdots + i_n = 2$ si et seulement si tous les i_k sont nuls sauf 2 qui valent 1 ou tous les i_k sont nuls sauf 1 qui vaut 2.
Il y a $\binom{n}{2}$ choix de $(i_1, \ldots, i_n)$ tels que tous les i_k sont nuls sauf 2 qui valent 1 (car cela revient à choisir la place de 1).
Il y a n choix de $(i_1, \ldots, i_n)$ tels que tous les i_k sont nuls sauf 1 qui vaut 2
Les deux cas étudiés précédemment s'exclent (union disjointe) donc $S_n^2 = \binom{n}{2} + n = \dfrac{n(n-1)}{2} + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
On a $S_1^p = 1$.
On a $i_1 + i_2 = p$ si et seulement $i_1 \in [[0, p]]$ et $i_2 = p - i_1$ donc $S_2^p = p + 1$.

R 27 *Montrons $S_{n+1}^p = \sum\limits_{i=0}^{p} S_n^i$..*
On a $i_1 + \cdots + i_{n+1} = p \Leftrightarrow \exists i \in [[0, p]]$ tel que $i_1 + \cdots + i_n = i$ et $i_{n+1} = p - i$
Pour i fixé, il y a S_n^i listes $(i_1, \ldots, i_n)$ vérifiant $i_1 + \cdots + i_n = i$ donc S_n^i listes $(i_1, \ldots, i_n, i_{n+1})$ vérifiant $i_1 + \cdots + i_n = i$ et $i_1 + \cdots + i_{n+1}$.
En faisant varier i dans $[[0, p]]$, il y a $\sum\limits_{i=0}^{p} S_n^i$ listes $(i_1, \ldots, i_{n+1})$ vérifiant $i_1 + \cdots + i_{n+1} = p$ (car les différentes valeurs de $i = i_1 + \cdots + i_n$ s'excluent donc on a un union disjointe, ce qui justifie la somme donc $\boxed{S_{n+1}^p = \sum\limits_{i=0}^{p} S_n^i}$.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\forall p \in \mathbb{N}$, $S_n^p = \binom{n+p-1}{p}$.
On a $\forall p \in \mathbb{N}$, $S_1^p = 1 = \binom{p}{p}$.
Supposons $\forall p \in \mathbb{N}$, $S_n^p = \binom{n+p-1}{p}$.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrons $S_{n+1}^p = \binom{n+p}{p}$.
En appliquant l'hypothèse de récurrence, on a $S_{n+1}^p = \sum\limits_{i=0}^{p} S_n^i = \sum\limits_{i=0}^{p} \binom{n+i-1}{i}$.
Montrons que $\sum\limits_{i=0}^{p} \binom{n+i-1}{i} = \binom{n+p}{p}$.
On peut refaire une récurrence sur n mais j'ai choisi de faire plutôt apparâitre une somme télescopique).
Si $i \geq 1$, $\binom{n+i-1}{i} = \binom{n+i}{i} - \binom{n+i-1}{i-1}$ (triangle de Pascal) donc $\sum\limits_{i=0}^{p} \binom{n+i-1}{i} = \binom{n-1}{0} + \sum\limits_{i=1}^{p} \left(\binom{n+i}{i} - \binom{n+i-1}{i-1}\right)$.
Par téléscopage, $\sum\limits_{i=1}^{p} \left(\binom{n+i}{i} - \binom{n+i-1}{i-1}\right) = \binom{n+p}{p} - \binom{n}{0}$. Or $\binom{n}{0} = \binom{n-1}{0} = 1$ donc $\boxed{S_{n+1}^p = \sum\limits_{i=0}^{p} \binom{n+i-1}{i} = \binom{n+p}{p}}$.