DM 13 pour le 13 1 25

Exercice 1:

On note S l'ensemble des suites réelles (u_n) vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1. On note γ la racine positive du trinôme $x^2 - x - 1$.
   Justifier que $\gamma > 1$ et que la deuxième racine est $\dfrac{-1}{\gamma}$.

2. On considère la suite réelle $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant: $y_0 = 0$ et $y_1 = 1$.
   Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de γ_n valable pour tout entier naturel n. Laquelle?
   (1) $y_n = \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}\sqrt{5}}$; (2) $y_n = \dfrac{(-1)^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\gamma^n\sqrt{5}}$; (3) $y_n = \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n\sqrt{5}}$.

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires vérifiant les propriétés suivantes:

   - X_0 et X_1 sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$;
   - pour tout entier naturel n : $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$.

   3.1. Montrer que X_2 suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

   3.2. Montrer que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

   3.3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : X_n = y_{n-1}X_0 + y_nX_1$.

   3.4. **Etude de l'espérance de la variable aléatoire X_p pour $p \in N$**

   3.4.1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une espérance que l'on notera x_p et la calculer en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n).

   3.4.2. Déterminer un équivalent de x_p lorsque p tend vers l'infini.

   3.5. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier que la variable aléatoire X_p possède une variance que l'on notera $\mathbb{V}(X_p)$ et la calculer en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n).

   3.6. Soient p et q deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
   Calculer, en fonction de λ et μ et de termes de la suite (y_n), la covariance $Cov(X_p, X_q)$ des deux variables aléatoires X_p et X_q.
   Que peut-on en conclure?

Exercice 2: Dénombrement des applications idempotentes

Soit E un ensemble et $p : E \to E$. On dit que p est idempotente si et seulement si $p \circ p = p$.

1. Montrer que p est idempotente si et seulement si $\forall x \in p(E),\ p(x) = x$.

2. Soit F et G deux ensembles finis. Déterminer le nombre d'applications de G dans F.

3. On suppose que E est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et F une partie de E de cardinal k.

   (a) Combien y-a-t-il d'applications p idempotentes vérifiant de E dans E vérifiant $p(E) = F$.

   (b) En déduire que le nombre d'applications idempotentes de E est $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}$.

Exercice 3:

- Pour ceux qui on fait le DS 5: partie 2 du DS 5 bis
- Pour ceux qui on fait le DS 5 bis: problème sur les urnes de Polya du DS 5

Exercice 1:

1. Les racines du trinôme sont de la forme $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ donc $\gamma = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > \dfrac{1+\sqrt{1}}{2} = 1$. Le produit des racines de $aX^2 + bX + c$ est $\dfrac{c}{a}$ donc si on note γ' la racine négative du trinôme $x^2 - x - 1$, on a $\gamma\gamma' = -1$ donc $\gamma' = \dfrac{-1}{\gamma}$.

2. L'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ admet deux racines rélles distinctes γ et γ' On en déduit qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = A\gamma^n + B(\gamma')^n$. La forme (2) est donc exclue (pour être rigoureux, il faudrait par exemple invoquer la liberté de la famille de suites $\left((\gamma^n), \left(\left(\dfrac{-1}{\gamma}\right)^n\right), ((-\gamma)^n)\right)$, ce que je ne fais pas). Dans la forme (1), on a $y_0 = \dfrac{1 - \frac{1}{\gamma}}{\sqrt{5}} \neq 0$ car $\gamma > 1$ donc la forme (1) ne convient pas non plus. L'énoncé assure qu'une des trois formes est correcte; c'est donc la forme (3).

3. **Etude de la suite** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3.1. D'après le cours, X_2 suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$ (on peut supposer qu'il s'agit d'une question de cours donc une démonstration est probablement attendue: cf cours).

3.2. On a $(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = (X_1 = 0 \cap X_0 + X_1 = 0) = (X_1 = 0 \cap X_0 = 0)$ donc, par indépendance, $P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = P(X_1 = 0 \cap X_0 = 0) = P(X_0 = 0)P(X_1 = 0) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}\dfrac{e^{-\mu}\mu^0}{0!} = e^{-(\lambda+\mu)}$. Par ailleurs $P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}\dfrac{e^{-(\lambda+\mu)}\mu^0}{0!} = e^{-(2\lambda+\mu)}$. Or $\lambda > 0$ donc $2\lambda + \mu \neq \lambda + \mu$ donc $P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) \neq P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$.

3.3. Montrons par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}^* : X_n = y_{n-1}X_0 + y_nX_1$. C'est vrai pour $n = 1$ car $y_0 = 0$ et $y_1 = 1$. C'est vrai pour $n = 2$ car $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ et $X_2 = X_0 + X_1$. Soit $n \geq 1$. Supposons que $X_n = y_{n-1}X_0 + y_nX_1$ et $X_{n+1} = y_nX_0 + y_{n+1}X_1$. On a alors $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n = (y_nX_0 + y_{n+1}X_1.) + (y_{n+1}X_0 + y_{n+2}X_1) = (y_n + y_{n+1})X_0 + (y_{n+1} + y_{n+2})X_1 = y_{n+1}X_0 + y_{n+2}X_1$. Ce qui achève la démonstration.

3.4. **Etude de l'espérance de la variable aléatoire** X_p **pour** $p \in N$

3.4.1. D'après le cours, X_0 est d'espérance finie $x_0 = \lambda$ et X_1 est d'espérance finie $x_1 = \mu$. Si $p \geq 2 \in \mathbb{N}$, $X_p = y_{p-1}X_0 + y_pX_1$ qui est d'espérance finie $x_p = y_{p-1}\mathbb{E}(X_0) + y_p\mathbb{E}(X_1)$. On a donc $x_p = y_{p-1}\lambda + y_p\mu$.

3.4.2. On a $y_p \sim_{p\to\infty} \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}}$ car $\gamma > 1$ et $\left|\dfrac{-1}{\gamma}\right| < 1$ donc $x_p = \dfrac{\gamma^{n-1}}{\sqrt{5}}\lambda + o_{p\to\infty}(\gamma^n) + \dfrac{\gamma^n}{\sqrt{5}}\mu + o_{p\to\infty}(\gamma^n) = \dfrac{\lambda+\mu\gamma}{\sqrt{5}}\gamma^{n-1} + o_{p\to\infty}(\gamma^n) \sim_{p\to\infty} \dfrac{\lambda+\mu\gamma}{\sqrt{5}}\gamma^{n-1}$ (car $\dfrac{\lambda+\mu\gamma}{\sqrt{5}} > 0$ donc $\dfrac{\lambda+\mu\gamma}{\sqrt{5}} \neq 0$). (Ce calcul justifie que, dans ce cas, l'équivalent de la somme est la somme des équivalents.)

3.5. D'après le cours, X_0 admet une variance $\mathbb{V}(X_0) = \lambda$ et X_1 admet une variance $\mathbb{V}(X_1) = \mu$. Si $p \geq 2 \in \mathbb{N}$, $X_p = y_{p-1}X_0 + y_pX_1$ et les variables aléatoires $y_{p-1}X_0$ et y_pX_1 sont indépendantes et admettent une variance donc X_p admet une variance $\mathbb{V}(X_p) = \mathbb{V}(y_{p-1}X_0) + \mathbb{V}(y_pX_1) = (y_{p-1})^2\mathbb{V}(X_0) + (y_p)^2\mathbb{V}(X_1)$ donc $\mathbb{V}(X_p) = \lambda(y_{p-1})^2 + \mu(y_p)^2$.

3.6. Les variables aléatoires X_p et X_q admettent une variance donc X_p+X_q admet une variance $\mathbb{V}(X_p + X_q) = \mathbb{V}(X_p) + \mathbb{V}(X_p) + 2Cov(X_p, X_q)$. On en déduit que
$Cov(X_p, X_q) = \frac{1}{2}(\mathbb{V}(X_p + X_q) - \mathbb{V}(X_p) - \mathbb{V}(X_q))$
$= \frac{1}{2}\left(\left(\lambda(y_{p+q-1})^2 + \mu(y_{p+q})^2\right) - \left(\lambda(y_{p-1})^2 + \mu(y_p)^2\right) - \left(\lambda(y_{p-1})^2 + \mu(y_p)^2\right)\right)$ donc $Cov(X_p, X_q) = \frac{1}{2}(\lambda((y$
Supposons $2 \leq p < q$. On a $y_{p+q-1} = y_{p+q-2} + y_{p+q-3} \geq y_{q-1} + y_{p-1}$ car la suite (y_n) est positive et

donc croissante. On a donc $(y_{p+q-1}) \geq (y_{q-1} + y_{p-1})^2 > (y_{p-1})^2 - (y_{q-1})$ car $y_n \geq 1$ pour $n \geq 1$ donc $2y_{p-1}y_{q-1} > 0$. On en déduit que $(y_{p+q-1})^2 - (y_{p-1})^2 - (y_{q-1})^2 > 0$. De même $(y_{p+q})^2 - (y_p)^2 - (y_q)^2 > 0$ donc $Cov\,(X_p, X_q) > 0$ et donc X_p et X_q ne sont pas indépendantes.

Exercice 2: Dénombrement des applications idempotentes

Soit E un ensemble et $p : E \to E$. On dit que p est idempotente si et seulement si $p \circ p = p$.

1. Supposons $p \circ p = p$. Soit $x \in p\,(E)$,il existe $e \in E$ tel que $x = p\,(e)$ donc $p\,(x) = p \circ p\,(e) = p\,(e) = x$.
   Supposons $\forall x \in p\,(E)$, $p\,(x) = x$. Soit $e \in E$, $p \circ p\,(e) = p\,(p\,(e)) = p\,(e)$ car $p\,(e) \in p\,(E)$ donc $p \circ p = p$.

2. $G = \{a_1, \ldots, a_n\}$. La donnée d'une application f de G dans F revient à la donnée de la liste $(f\,(a_1)\,, \ldots, f\,(a_n))$ d'éléments de F.
   Si $card\,(F) = k$, il y a k^n listes de cette forme donc k^n applications de G dans F.

3. On suppose que E est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et F une partie de E de cardinal k.

   (a) Une application p de E dans E vérifie $p\,(E) = F$ et est idempotente si et seulement si
   $\forall x \in E$, $p\,(x) \in F$ et $\forall x \in F$, $p\,(x) = x$.
   c'est-à-dire $\forall x \in F$, $p\,(x) = x$ et $\forall x \in E \backslash F$, $p\,(x) \in F$..
   Une telle application est donc définie par sa restriction à $E \backslash F$ qui est une application quelconque à valeurs dans F. Il y en a donc k^{n-k}.

   (b) Pour F fixé de cardinal k, il y a k^{n-k} applications idempotentes de E vérifiant $p\,(E) = F$.
   Or il y a $\binom{n}{k}$ ensembles F de cardinal k donc $\binom{n}{k}k^{n-k}$ applications idempotentes de E vérifiant que $p\,(E)$ est de cardinal k.
   En faisant varier la valeur de k, on obtient toutes les applications idempotentes de E donc $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}k^{n-k}$ en tout.