# Semaines 13 et 14

**Attention 1** *(pour les colleurs)*

- *Pas de th de convergence dominée dans la partie intégration.*
- *Les étudiants sont habitués à manipuler le vocabulaire de l'absolue converge plutôt que l'intégrabilité pour l'instant.*

## Contenu:

- Variables aléatoires discrètes: couples de VA, indépendance, espérance, variance, covariance. Inégalité de Markov et inégalité de Bienaymée-Cebychev. Loi des faible des grands nombres
- Fonctions génératrices d'une VA entière.
- intégration sur un intervalle quelconque: fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque. définition de l'intégrale, intégrales de Riemann, comparaisons à un fonction intégrable, intégration par parties, changement de variable $C^1$ strictement monotone.

## Questions de cours: questions avec (∗) uniquement pour les meilleurs.

1. Espérance de $XY$ lorsque $X$ et $Y$ sont indépendantes, formule du transfert: énoncés seuls.
2. (∗) Soit $X$ est variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si$X$ est variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance finie alors $E\left(X\right)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}P\left(X\geq n\right)$.
3. Si $X^2$ est d'espérance finie, alors $X$ est d'espérance finie, $\left(X-E\left(X\right)\right)^2$ est d'espérance finie et $E\left(\left(X-E\left(X\right)\right)^2\right)=E(X^2)-E(X)^2$
4. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Si $X^2$ est d'espérance finie alors $\left(aX+b\right)^2$ aussi et $V\left(aX+b\right)=a^2V\left(X\right)$
5. Si $X\sim\mathcal{G}\left(p\right)$ alors $X$ admet une variance $V\left(X\right)=\dfrac{q}{p^2}$.
6. Si $X\sim\mathcal{P}\left(\lambda\right)$ alors $X$ admet une variance $V\left(X\right)=\lambda$.
7. Si $X\geq 0$ est d'espérance finie alors pour tout $\alpha>0$ $P\left(X\geq\alpha\right)\leq\dfrac{E\left(X\right)}{\alpha}$.
8. Si $X^2$ est d'espérance finie alors pour tout $\varepsilon>0$ $P\left(\left|X-E\left(X\right)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\dfrac{V\left(X\right)}{\varepsilon^2}$.
9. On effectue $n$ lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Soit $X$ le nombre de fois où on obtient $Pile$. $\dfrac{X}{n}$ désigne donc la fréquence d'apparition de $Pile$. Déterminer $n$ pour qu'on puisse affirmer que cette fréquence est strictement comprise entre 0.45 et 0.55 avec une probabilité d'au moins 0.9.
10. Inégalité de Cauchy-Schwarz (énoncé seul).
    Si $X>0$ et $X$ et $\dfrac{1}{X}$ sont d'espérances finies, alors $\dfrac{1}{E\left(X\right)}\leq E\left(\dfrac{1}{X}\right)$.
11. définition de la covariance, bilinéarité de la covariance.
12. En utilisant la bilinéarité généralisée, exprimer $V\left(X_1+\cdots+X_n\right)$ à l'aide des variances des $X_i$ et de covariances de $(X_i,X_j)$.
13. Expression de $V\left(X_1+\cdots+X_n\right)$ lorsque les $X_1,\ldots,X_n$ sont indépendantes.
14. Deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ ayant même fonction génératrice ont même loi.
15. Soit $p\in\left]0,1\right[$ et $q=1-p$. Si $X\sim\mathcal{G}\left(p\right)$, alors $R_X=\dfrac{1}{q}$ et $\forall t\in\left]-\frac{1}{q},\frac{1}{q}\right[$, $G_X\left(t\right)=\dfrac{pt}{1-qt}$.
16. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Si $X\sim\mathcal{P}\left(\lambda\right)$, alors $R_X=+\infty$ et $\forall t\in\mathbb{R}$, $G_X\left(t\right)=e^{\lambda(t-1)}$.
17. (∗) Si $X$ et $Y$ sont indépendantes $G_{X+Y}=G_XG_Y$ (deux démonstrations).
18. Extension de la relation précédente à $n$ variables aléatoires indépendantes. En déduire la fonction génératrice de $X$ si $X\sim B\left(n,p\right)$.

19. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sont indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$: démonstration avec les fonctions génératrices.

20. Si $R_X > 1$, $G'_X(1) = E(X)$. Expression de $V(X)$ à l'aide de $G_X$. (le résultat reste vrai si $R_X = 1$ et $G_X$ est dérivable (deux fois dérivable en 1).

21. Enoncé et démonstration de la loi faible des grands nombres.

22. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + i^2}$. Etudier la convergence de la suite $(S_n)$.

23. Citer les critères de comparaison permettant de montrer qu'une fonction est intégrale.

24. Pour $\alpha > 0$, convergence des intégrales $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$.

25. $\int_0^1 \ln(t)\, dt$ converge par le calcul.

26. Montrer que $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable par comparaison avec une intégrale de Riemann.

27. Etudier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-t}}{t^{\frac{3}{2}}} dt$

28. Convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

29. Si $a < b$, convergence de $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ et de $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ par un changement de variable.

30. Convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a (t+1)^b} dt$.

31. Convergence de $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{\frac{3}{2}}} dt$.

32. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}} dt$ converge et est égale à $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

33. montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

34. $(*)$ En utilisant l'inégalité $|\sin(t)| \geq \sin^2(t)$, montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ n'est pas absolument convergente.

35. Montrer que si $f$ admet une limite $l$ en $+\infty$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, alors $l = 0$.

36. Montrer que $\int_1^{+\infty} \cos\left(t^2\right) dt$ converge. Commenter cet exemple.