DM 14 pour le 24 1 25.

EXERCICE 1
Etude de séries de pile ou de face

Présentation générale

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $1/2$ et face avec la probabilité $1/2$). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'évènement [le k-ième lancer de la pièce donne pile] et par F_k l'évènement [le k-ième lancer de la pièce donne face].
On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n °1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série $n°2$ commence au lancer suivant la fin de la série $n°1$ et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.
Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :
Exemple 1: $\underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série nn°1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série no 2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n3}} \cap F_8 \cap \cdots$.

Exemple 2: $\underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n°1}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n°2}} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k\right)}_{\text{Série n°3}}$.

Partie I - Etude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante:

- si la série n°1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;
- sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n°1.

Ainsi, si l'évènement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'évènement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I. 1 - Calcul de la somme d'une série entière

Q14. Rappeler (sans le démontrer) le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum_{k \geq 0} x^k$$

Q15. En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\sum_{k \geq 0} kx^k$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

I. 2 - Etude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.
Q16. Exprimer l'évènement $(L_1 = k)$ en fonction des évènements P_i et F_i pour $i \in [[1, k+1]]$
Q17. Montrer que $P(L_1 = k) = 2^{-k}$.
Q18. En déduire la valeur de $P(L_1 = 0)$.
Q19. Démontrer que la variable aléatoire L_1 admet une espérance, puis déterminer sa valeur. Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans cet exercice?

Partie II - Etude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'évènement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4.$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II. 1 - Généralités

Q20. Déterminer les lois de N_1 et N_2.
Q21. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

II. 2 - Relation de récurrence pour la loi de N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n.
Q22. Soit $k \in [[1, n+1]]$. Justifier que l'on a l'égalité d'évènements :

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1},$$

puis en déduire que :

$$P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} P((N_n = k) \cap P_n).$$

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in [[1, n+1]]$ les relations :

$$\begin{aligned}
P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) &= \frac{1}{2} P((N_n = k) \cap F_n) \\
P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) &= \frac{1}{2} P((N_n = k-1) \cap P_n) \\
P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) &= \frac{1}{2} P((N_n = k-1) \cap F_n)
\end{aligned}$$

Q23. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in [[1, n+1]]$ la relation :

$$P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2} P(N_n = k) + \frac{1}{2} P(N_n = k-1).$$

II. 3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m, dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_m(x) = \sum_{k=1}^{m} P\left(N_m = k\right) x^k.$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_1(x) = x.$$

Q24. Déduire de Q23 que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x).$$

Q25. Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.
Q26. Rappeler l'expression de l'espérance de N_n en fonction de sa fonction génératrice G_n. En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n.
Q27. Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n.

EXERCICE 2
La constante d'Euler

Présentation générale

Dans cet exercice, on commence dans la première partie par démontrer la convergence d'une suite afin de définir la constante d'Euler comme sa limite. Dans la seconde partie, on détermine une expression de cette constante sous la forme d'une intégrale.

Partie I - Construction de la constante d'Euler

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$$

et on considère la suite $(\Delta_n)_{n \geq 2}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}, \quad \Delta_n = u_n - u_{n-1}$$

Q28. Déterminer un nombre $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\Delta_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{a}{n^2}$.
Q29. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \Delta_n$ est convergente.
Q30. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie II - Expression intégrale de la constante d'Euler

Dans Q30, on a montré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre réel que l'on note γ dans la suite de l'exercice. Ce dernier est appelé constante d'Euler. Dans cette partie, on détermine une expression de γ sous la forme d'une intégrale.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]0, +\infty\left[, \quad f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si } t < n \\ 0 & \text{si } t \geq n \end{cases}\right.$$

II. 1 - Propriétés de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Dans cette sous-partie, on pourra utiliser librement l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ valable pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

Q31. Soit $t \in]0, +\infty[$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n \geq n_0$, on a :

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)$$

Q32. Déduire de la question précédente que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto e^{-t}\ln(t)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Q33. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a $|f_n(t)| \leq e^{-t}|\ln(t)|$.

Q34. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}\ln(t)$est intégrable sur $]0, +\infty[$.

II. 2 - Convergence d'une suite d' intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 u^n \ln(1-u)\mathrm{d}u$$

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Q35. Montrer que l'intégrale I_n est convergente.

Q36. Déduire des résultats de la sous-partie II. 1 que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$$

Q37. Montrer que l'intégrale J_n est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,\mathrm{d}u$$

est convergente. En déduire que l'intégrale J_n est convergente et que l'on a les égalités :

$$J_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Q38. Montrer que l'on a la relation :

$$I_n = \frac{n}{n+1}\ln(n) + nJ_n.$$

Q39. Déduire des questions précédentes que:

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$$

FIN

EXERCICE 1
Etude de séries de pile ou de face

Partie I - Etude de la longueur de la première série

Q14. D'après le cours, la série entière $\sum_{k>0} x^k$ a un rayon de convergence égal à 1 et a pour somme la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.
Q15. D'après le cours, la somme d'une série entière de la variable réelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et les dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme. En particulier, soit $x \in]-1,1[$. La série de terme général $kx^{k-1}, k \in \mathbb{N}^*$, converge de somme $\frac{1}{(1-x)^2}$. En multipliant par x et en constatant que le terme d'indice $k=0$ est nul, on en conclut que la série $\sum_{k \geq 0} kx^k$ converge et qu'on a $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.
Q16. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'évènement $(L_1 = k)$ est réalisé si et seulement si la première série est de longueur k, c'est-à-dire les k premiers lancers donnent le même résultat et le ($k+1$)-ième lancer donne un résultat différent. On a donc

$$(L_1 = k) = (P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}).$$

Q17. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Les évènements $P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}$ et $F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}$ étant incompatibles, on a

$$P(L_1 = k) = P(P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}) + P(F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}).$$

Par indépendance des lancers, on a alors
$P(L_1 = k) = P(P_1) \times \ldots \times P(P_k) \times P(F_{k+1}) + P(F_1) \times \ldots \times P(F_k) \times P(P_{k+1}) = \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2}{2^{k+1}}$ d'où $P(L_1 = k) = 2^{-k}$.
Q18. Par définition, la variable aléatoire L_1 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. La série de terme général $P(L_1 = k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge donc de somme 1. On a alors $P(L_1 = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}$. Or, $\frac{1}{2}$ appartient à l'intervalle] - 1,1 [donc, d'après la question 14 , on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

On a ainsi $P(L_1 = 0) = 0$.
Q19. D'après la question 17 , pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $kP(L_1 = k) = k\left(\frac{1}{2}\right)^k$. Cette égalité est aussi valable lorsque $k = 0$. Or, d'après la question 15 , la série $\sum_{k \geq 0} k\left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge de somme $\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$.
En particulier, la série de terme général $kP(L_1 = k), k \in \mathbb{N}$, converge donc, par positivité, converge absolument de somme 2 , ce qui signifie que L_1 admet une espérance égale à 2 .
Ainsi, en moyenne, la première série dans la suite de lancers est de longueur 2.

Partie II - Etude du nombre de séries

Q20. La variable aléatoire N_1 représente le nombre de séries apparues en un lancer, elle ne peut donc prendre que la valeur 1 .
La variable aléatoire N_2 représente le nombre de séries apparues lors des deux premiers lancers, elle prend donc la valeur 1 si les 2 premiers lancers donnent le même résultat, la valeur 2 s'ils donnent des résultats différents. On a

$$\begin{aligned} P\left(N_2=1\right) &= P\left(\left(P_1 \cap P_2\right) \cup \left(F_1 \cap F_2\right)\right) \\ &= P\left(P_1 \cap P_2\right)+P\left(F_1 \cap F_2\right) \quad \text{(incompatibilité)} \\ &= P\left(P_1\right) P\left(P_2\right)+P\left(F_1\right) P\left(F_2\right) \quad \text{(indépendance)} \\ &= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

On a donc nécessairement $P\left(N_2=2\right)=1-P\left(N_2=1\right)=\frac{1}{2}$.
En conclusion, N_1 suit la loi certaine de valeur 1 et N_2 suit la loi uniforme sur $\{1;2\}$.
Q21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Au cours des n premiers lancers, au moins une série apparaît (celle contenant le résultat du premier lancer) et, au maximum, n séries apparaissent (car chaque série contient au moins un résultat). La variable aléatoire N_n prend donc ses valeurs dans l'ensemble $[[1, n]]$
Q22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [[1, n+1]]$. Si l'évènement $P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé, alors le n-ième et le $(n+1)$ ième lancers donnent le même résultat, donc le $(n+1)$-ième résultat contribue à la série contenant le n-ième résultat et on a $N_n=N_{n+1}$. On a donc l'égalité d'évènements

$$\left(N_{n+1}=k\right) \cap P_n \cap P_{n+1}=\left(N_n=k\right) \cap P_n \cap P_{n+1}.$$

Puisque les évènements ($N_n=k$) et P_n sont indépendants du ($n+1$)-ième lancer, on en déduit que

$$P\left(\left(N_{n+1}=k\right) \cap P_n \cap P_{n+1}\right)=P\left(\left(N_n=k\right) \cap P_n\right) P\left(P_{n+1}\right)=\frac{1}{2} P\left(\left(N_n=k\right) \cap P_n\right).$$

Q23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les évènements $P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}$ et $P_n \cap F_{n+1}$ décrivent les quatre résultats possibles pour les n-ième et ($n+1$)-ième lancers. Ils sont deux à deux incompatibles et ont pour réunion l'évènement certain, formant ainsi un système complet d'évènements. Soit $k \in [[1, n+1]]$. D'après la formule des probabilités totales, on a donc

$$\begin{aligned} P\left(N_{n+1}=k\right) &= P\left(\left(N_{n+1}=k\right) \cap P_n \cap P_{n+1}\right)+P\left(\left(N_{n+1}=k\right) \cap P_n \cap F_{n+1}\right)+P\left(\left(N_{n+1}=k\right) \cap F_n \cap F_{n+1}\right)+P\left(\left(N\right.\right. \\ &= \frac{1}{2}\left(P\left(\left(N_n=k\right) \cap F_n\right)+P\left(\left(N_n=k\right) \cap P_n\right)\right)+\frac{1}{2}\left(P\left(\left(N_n=k-1\right) \cap F_n\right)+P\left(\left(N_n=k-1\right) \cap P_n\right)\right) \\ P\left(N_{n+1}=k\right) &= \frac{1}{2} P\left(N_n=k\right)+\frac{1}{2} P\left(N_n=k-1\right) .\text{car } \left(F_n, P_n\right) \text{ est un SCE} \end{aligned}$$

Q24. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 23 , on a

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} P\left(N_{n+1}=k\right) x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1}{2} P\left(N_n=k\right)+\frac{1}{2} P\left(N_n=k-1\right)\right) x^k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} P\left(N_n=k\right) x^k+\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} P\left(N_n=k-1\right) x^k \end{aligned}$$

Or $P\left(N_n=n+1\right)=0$ donc $\sum\limits_{k=1}^{n} P\left(N_n=k\right) x^k=\sum\limits_{k=1}^{n} P\left(N_n=k\right) x^k=G_n(x)$ et
$\sum\limits_{k=1}^{n+1} P\left(N_n=k-1\right) x^k=\sum\limits_{k=0}^{n} P\left(N_n=k\right) x^{k+1}=x \sum\limits_{k=0}^{n} P\left(N_n=k\right) x^{k+1}=x G_n(x)$ car $P\left(N_n=0\right)=0$.
On en conclut qu'on a $G_{n+1}(x)=\frac{1}{2} G_n(x)+\frac{1}{2} x G_n(x)=\frac{1+x}{2} G_n(x)$.
Q25. Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $\left(G_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est qéométrique de raison $\frac{1+x}{2}$ et de premier terme $G_1(x)=x$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, G_n(x)=x\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}$.
Q26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme définissant G_n étant finie, la fonction G_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le cours, N_n admet une espérance égale à $G_n^{\prime}(1)$.
Soit un entier $n \geq 2$. D'après la question 25 , pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$G_n'(x)=\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}+x\cdot(n-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-2}$$

donc, en particulier, on a $G_n'(1)=1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}$. Lorsque $n=1$, on a $G_1(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, donc $G_1'(x)=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
En conclusion, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $E(N_n)=G_n'(1)=\frac{n+1}{2}$.
Q27. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On rappelle que la variable aléatoire N_n prend ses valeurs dans l'ensemble $[[1,n]]$ La fonction G_n est polynomiale sur $\mathbb{R}$. Par définition, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$G_n(x)=\sum_{k=1}^{n}P(N_n=k)\,x^k.$$

Par ailleurs, d'après la question 25 , pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$G_n(x)=x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{1}{2^{n-1}}x^{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{1}{2^{n-1}}x^k.$$

Par unicité des coefficients d'une fonction polynomiale sur un intervalle, pour tout $k\in[[1,n]]$, on a $P(N_n=k)=\frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{k-1}$. Cela détermine la loi de N_n.

EXERCICE 2
La constante d'Euler

Partie I - Construction de la constante d'Euler

Q28. Soit un entier $n\geq 2$. On a

$$\Delta_n=u_n-u_{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\ln(n-1)=\frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Quand $n\to+\infty$, on a donc

$$\Delta_n=\frac{1}{n}+\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En notant $a=\frac{1}{2}$, on a donc $\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{a}{n^2}$.
Q29. La série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge et, quand $n\to+\infty$, on a $-\Delta_n\sim\frac{1}{2n^2}$. En particulier, il existe un rang à partir duquel $-\Delta_n$ est positif et, d'après le théorème de comparaison des séries positives, la série de terme général $-\Delta_n$ converge. En multipliant par -1 , on en conclut que la série $\sum_{n\geq 2}\Delta_n$ converge.
Q30. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Par télescopage, on a $u_n-u_1=\sum_{k=2}^{n}\Delta_k$, donc $u_n=u_1+\sum_{k=2}^{n}\Delta_k$. D'après la question 29 , on en conclut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Partie II - Expression intégrale de la constante d'Euler

Q31. Soit $t\in]0,+\infty[$. L'entier $n_0=\lfloor t\rfloor+1$ est non nul et, pour tout entier $n\geq n_0$, on a $n>t$ donc $f_n(t)=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ln(t)$. La propriété annoncée est ainsi bien démontrée.
Q32. Soit $t\in]0,+\infty[$ D'après la question précédente, en reprenant les mêmes notations, pour tout entier $n\geq n_0$, on a $f_n(t)=\exp\left(n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)\ln(t)$. Quand $n\to+\infty$, on a $\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\sim-\frac{t}{n}$ donc, par continuité de exp, $f_n(t)$

admet une limite égale à $e^{-t}\ln(t)$.
Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $t\mapsto e^{-t}\ln(t)$.
Q33. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in]0,+\infty[$.

- Si on a $t\geq n$, alors on a $|f_n(t)|=0\leq e^{-t}|\ln(t)|$.
- Si on a $t<n$, alors on a $0<\frac{t}{n}<1$ donc $-\frac{t}{n}$ appartient à l'intervalle $]-1,+\infty[$. D'après l'inégalité de concavité de la fonction ln, on a donc $\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)\leq-\frac{t}{n}$. Par croissance et positivité de la fonction $x\mapsto e^{nx}$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit qu'on a $0<\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq e^{-t}$. On a alors $|f_n(t)|=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n|\ln(t)|\leq e^{-t}|\ln(t)|$.
  Dans les deux cas, on a montré qu'on a $|f_n(t)|\leq e^{-t}|\ln(t)|$.

Q34 Posons $f(t)=e^{-t}\ln(t)$. La fonction g est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
Sur $]0,1]$. On a $f(t)\sim_{t\to0}\ln(t)$ et $t\mapsto\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ donc f est intégrable sur $]0,1]$
Sur $[1,+\infty[$. On a $\dfrac{f(t)}{e^{-\frac{t}{2}}}=e^{-t}\ln(t)\to_{t\to+\infty}0$ donc $.f(t)=o_{t\to+\infty}\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$ et $t\mapsto e^{-\frac{t}{2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Q35: On a $|f_n(t)|\leq f(t)$ et f est intégrable sur $]0,+\infty[$ donc f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Q36: Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ (et même continue).
D'après la question 32 , la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f:t\mapsto e^{-t}\ln(t)$.
La fonction f est continue par morceaux car continue sur $]0,+\infty[$.
D'après la question 33, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in 0,+\infty[$, on a $|f_n(t)|\leq|f(t)|$.
De plus, d'après la question 34 la fonction $|f|$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$.
Q37: La fonciton $u\mapsto u^n\ln(1-u)$ est continue sur $[0,1[$.

Sous réserve de convergence, IPP avec $\begin{cases} v(u)=\ln(1-u)\,;v'(u)=\dfrac{-1}{1-u}\\ w(u)=\dfrac{u^{n+1}-1}{n+1};w'(u)=u^n\end{cases}$

On a $v(u)w(u)=\dfrac{u^{n+1}-1}{n+1}\ln(1-u)$ et $\dfrac{u^{n+1}-1}{u-1}=\sum\limits_{i=0}^n u^i$ donc $v(u)w(u)=-\dfrac{\sum\limits_{i=0}^n u^i}{n+1}(1-u)\ln(1-u)\to_{u\to1}0$ car $\lim\limits_{x\to0}x\ln(x)=0$.
On a donc $J_n=\int_0^1u^n\ln(1-u)\mathrm{d}u=[uv]_0^1-\int_0^1\frac{u^{n+1}-1}{(n+1)(u-1)}\mathrm{d}u=-\dfrac{1}{n+1}\int_0^1\dfrac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u.$
Or $\dfrac{u^{n+1}-1}{u-1}=\sum\limits_{i=0}^n u^i\to_{u\to1}n+1$ donc la fonction définie sur $[0,1[$ $u\mapsto\dfrac{u^{n+1}-1}{u-1}$ est prolongeable par continuité en 1 donc
l'intégrale généralisé $\int_0^1\dfrac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u$ converge donc l'intégrale généralisée J_n est convergente et

$$J_n=-\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u=-\frac{1}{n+1}\int_0^1\sum_{i=0}^n u^i\mathrm{d}u=-\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n\frac{1}{i+1}=-\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^n\frac{1}{k}.$$

Q38 Effectuons le changement de variable défini par $u(t)=1-\dfrac{t}{n}$ dans l'intégrale I_n.
La fonction u est de classe C^1 et strictement décroissante sur $]0,n[$.

$$I_n=-n\int_0^n\left(1-\tfrac{t}{n}\right)^n\ln(t)\frac{-1}{n}\mathrm{d}t=-n\int_1^0u^n\ln(n\times(u-1))\mathrm{d}u=n\int_0^1u^n(\ln(n)+\ln(u-1))\,\mathrm{d}u.$$

On a donc $I_n=\frac{n}{n+1}\ln(n)+nJ_n$.
Q39 On a donc, d'après Q37, $I_n=\dfrac{n}{n+1}\ln(n)-\dfrac{n}{n+1}\sum\limits_{i=0}^n\dfrac{1}{k}=\dfrac{n}{n+1}\left(\ln(n)-\sum\limits_{i=0}^n\dfrac{1}{k}\right)\to_{n\to+\infty}\gamma$ et d'après Q36, $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$ donc $\gamma=\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$.