Semaines 15 et 16

Pour les colleurs:

- EVN très peu traités pour l'instant: pas beaucoup d'exercices possibles.

Contenu:

- suites de fonctions: continuité de la limite, interversion limite intégrale sur un segment, dérivabilité de la limite, (non encore traité: théorème de la double limite et généralisation du th de dérivabilité aux fonctions de classe C^k)
- intégration sur un intervalle quelconque: théorème de convergence dominée.
- Espaces vectoriels normés: normes, normes 1, 2 et ∞ dans $\mathbb{K}^p$ et $C([a,b],\mathbb{R})$, normes équivalentes, parties bornées, parties convexes. Les normes d'un ev de dim finie sont équivalentes (admis).
- révisions de première année: fonctions convexes.
- révisions de l'ensemble du cours de probabilités de deuxième année

Questions de cours:

1. Donner la définition de la convergence simple et de la convergence uniforme d'une suite de fonctions.
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{x+n}$. Etudier la CV simple et uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.
3. On pose $f_n(x) = \sqrt{n}xe^{-nx}$. Etudier la CV simple et uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.
4. On pose $f_n(x) = x^n$. Etudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0,1]$. En déduire en utilisant le théorème de continuité de la limite que la suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.
5. Enoncer le théorème de continuité et le théorème de dérivabilité de la limite.
6. Enoncer et démontrer le théorème d'interversion limite intégrale sur un segment.
7. On pose $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$. Etudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0,+\infty[$. Calculer $f_n(x_n)$ avec x_n bien choisi et en déduire que la suite (f_n) ne converge pas uniformément. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur tout segment $[a,b]$ avec $0 < a < b$.
8. Enoncer le théorème de dérivabilité de la limite.
9. Enoncé du th de cv dominée. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{t}{n}\right)}{1+t^2} dt$. Déterminer la limite de (I_n).
10. Soit f une fonction continue décroissante et intégrable sur $[0,+\infty[$. Déterminer la limite de la suite $\left(\int_0^{+\infty} f\left(t+\frac{t^2}{n}\right) dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
11. Etudier la convergence de la suite $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
12. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive de limite nulle en $+\infty$. Montrer que f est bornée.
13. Déterminer les fonctions $f : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue en 0 et vérifiant:
$$\forall x \in]0,+\infty[, f(2x) = f(x)$$
14. Majorer la fonction $x \mapsto \left|\cos(x) - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)\right|$ sur $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ en utilisant l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre 4.
15. Définition d'une norme. Donner sans démonstration 3 exemples de normes de $\mathbb{R}^n$. Idem dans $C([a,b],\mathbb{R})$.
16. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que $B(a,r) = \{x \in E, \|x-a\| \leq 1.\}$. Montrer que B est une partie bornée et convexe de E.
17. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sont-ils bornés? convexes?
18. Une question de cours de probabilité des programmes précédents.
19. $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.