DM 16 pour le 7 janvier 2025

Problème

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ (intégrale de Gauss) },\ I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} dt \\ W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) dx \text{ (intégrale de Wallis) et } J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \end{aligned}$$

Première partie: calcul de l'intégrale de Gauss

Etude de la convergence de la suite (I_n)

Q 1 *Montrer que l'intégrale généralisée* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ *est convergente.*

Q 2 *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, l'intégrale généralisée* I_n *est convergente.*

Q 3 *Justifier que pour tout* $a \geq 0$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \geq 1 + t^2$.

Q 4 *Montrer que la suite* (I_n) *converge et préciser sa limite (on détaillera les hypothèses du théorème utilisé).*

Etude des intégrales de Wallis W_n

Q 5 *Montrer que la suite* (W_n) *converge et préciser sa limite.*

Q 6 *Calculer* W_0 *et* W_1*. Montrer que la suite* (W_n) *est décroissante.*

Q 7 *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$*. En déduire que* $W_n \sim_{n \to +\infty} W_{n+1}$.

Q 8 *Montrer que* $(n+1) W_n W_{n+1}$ *ne dépend pas de* n *et déterminer sa valeur.*

Q 9 *En déduire que la suite* (nW_n^2) *admet une limite et que* W_n *est équivalent à* $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ *au voisinage de l'infini.*

Q 10 *Donner une expression de* W_{2n} *et* W_{2n+1} *uniquement à l'aide de factorielles et de puissances.*

Lien entre W_n et $I_n$et valeur de l'intégrale de Gauss

Q 11 *Montrer que, pour* $n \geq 1$*, on a* $I_n = \sqrt{n} W_{2n-2}$ *(on pourra poser* $t = \sqrt{n} \tan(x)$*).*

Q 12 *En déduire que* $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

Q 13 *En déduire la convergence et la valeur des intégrales généralisées* $J = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ *et* $K = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$.

Deuxième partie: moments de la densité gaussienne

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. On dira qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est une densité (de probabilité) sur I si elle est **continue** et **positive** sur I, intégrable sur I et de masse 1 c'est-à-dire:

$$\int_I f(x)\mathrm{d}x = 1.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on dira que le moment d'ordre n d'une densité est fini si:

$$x \mapsto x^n f(x) \text{ est intégrable sur } I,$$

et on définit alors le moment d'ordre n par le réel:

$$m_n(f) = \int_I x^n f(x)\mathrm{d}x.$$

Dans tout le problème la densité gaussienne est la densité $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Q 14 *On considère $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par: $\forall x \in [0, +\infty[$, $g(x) = e^{-x}$. Montrer que g est une densité sur $[0, +\infty[$, que tous ses moments sont finis et calculer $m_n(g)$ pour $n \in \mathbb{N}$.*

Q 15 *Justifier que la fonction φ est bien une dénsité.*

Q 16 *Montrer que tous les moments de la densité gaussienne φ sont finis.*

Q 17 *Que vaut $m_{2p+1}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$?*

Q 18 *Calculer $m_{2p}(\varphi)$ pour $p \in \mathbb{N}$.*
On exprimera le résultat sous forme compacte avec des factorielles là où c'est possible

Q 19 *Donner un exemple de densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le moment d'ordre 1 n'est pas fini.*

Exercice: extension de l'intervalle pour appliquer le th de convergence dominée

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} x^{\frac{1}{n}} \ln(x)\, dx$.

Q 20 *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n existe*

Q 21 *Justifier que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$.*

Q 22 *Etudier la convergence de la suite (I_n).*

Exercice: Fonction dominante définie par morceaux

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} t^{1+\frac{1}{n}} e^{-t} dx$.

Q 23 *Etudier la convergence de la suite (I_n).*

Correction DM 16

Problème

Première partie: calcul de l'intégrale de Gauss

R 1 *La fonction* $t \mapsto e^{-t^2}$ *est définie et continue sur* $[0,+\infty[$. *De plus* $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2e^{-t^2} = 0$ *(C.C) donc* $e^{-t^2} = o_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ *or* $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$ *donc* $t \mapsto e^{-t^2}$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$ *donc sur* $[0,+\infty[$. *l'intégrale généralisée* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ *est absolument convergente.*

R 2 *Ici* n *est fixé. La fonction* $f_n : t \mapsto \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}$ *est définie et continue sur* $[0,+\infty[$ *et* $f_n(t) \sim_{t\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{t^2}{n}\right)^n} = \frac{K}{t^{2n}}$ *avec* $K = n^n$ *Or* $n \geq 1$ *donc* $t \mapsto \frac{K}{t^{2n}}$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$ *donc l'intégrale généralisée* I_n *est convergente.*

R 3 *D'après la formule du binôme* $(1+a)^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k$ *or* $a \geq 0$ *donc* $(1+a)^n \geq \sum\limits_{k=0}^{1}\binom{n}{k}a^k = 1+na$. *On a donc* $\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n \geq 1+t^2$.

R 4 *Appliquons le théorème de convergence dominée sur* $]0,+\infty[$:
- Soit $t > 0$ *fixé.* $f_n(t) = \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)}$. *Or* $-n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) = -n \times \left(\frac{t^2}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{t^2}{n}\right)\right) = -t^2 + o_{n\to+\infty}(t^2) \to_{n\to+\infty} -t^2$ *donc, par composition des limites,* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t^2} = f(t)$. *La suite de fonctions* (f_n) *converge simplement vers vers* f *sur* $]0,+\infty[$.
- Les fonctions f_n *et* f *sont continues par morceaux sur* $]0,+\infty[$.
- Domination: $\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n \geq 1+t^2 > 0$ *donc* $|f_n(t)| = f_n(t) \leq \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$. *Or* $\dfrac{1}{1+t^2} \sim_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t^2}$ *donc* φ *est intégrable sur* $[0,+\infty[$ *donc sur* $]0,+\infty[$.
On en déduit que la suite (I_n) *converge vers* I.

R 5 *Posons* $g_n(t) = \cos^n(t)$ *pour* $t \in]0,1]$. *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t) = 0 = g(t)$, *les fonctions* g_n *et* g *sont continues par morceaux sur* $]0,1]$ *et* $|g_n(t)| \leq 1 = \varphi(t)$ *et* φ *est continue par morceaux et intégrable sur* $]0,1]$ *donc (th de CV dominée) la* (W_n) *converge.vers* $\int_0^1 0dt = 0$.
Remarque: on peut appliquer le théorème au choix sur $[0,1]$ *ou sur* $]0,1]$. *Si on choisit de le faire sur* $[0,1]$, *la fonction limite est seulement continue par morceaux.*

R 6 *On obtient* $W_0 = \frac{\pi}{2}$ *et* $W_1 = 1$. *De plus si* $0 \leq x \leq 1$, *alors* $0 \leq \cos(x) \leq 1$ *donc* $0 \leq \cos^{n+1}(x) \leq \cos^n(x)$ *et donc* $0 \leq W_{n+1} \leq W_n$. *La suite* (W_n) *est décroissante.*

R 7 *Par IPP dans* $W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(x)dx$ *avec* $u(x) = \cos^{n+1}(x)$ *et* $v'(x) = \cos(x)$, *on obtient que*
$W_{n+2} = [-\sin(x)\cos^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\sin^2(x)\,dx$ *d'où*
$W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\sin^2(x)\,dx = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)(1-\cos^2(x))\,dx$ *donc* $W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$.
On en déduit que $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$. *Or* $W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$ *donc* $\frac{n+1}{n+2}W_n \leq W_{n+1} \leq W_n$ *et* $\frac{n+1}{n+2} \to_{n\to+\infty} 1$ *donc* $W_n \sim_{n\to+\infty} W_{n+1}$.

R 8 *D'aprés ce qui précède,* $(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+2)W_{n+1}\frac{n+1}{n+2}W_n = (n+1)W_nW_{n+1}$ *donc* $(n+1)W_nW_{n+1}$ *ne dépend pas de* n *et* $(n+1)W_nW_{n+1} = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}$.

R 9 *D'après b,* $W_n \sim_{n\to+\infty} W_{n+1}$ *donc* $\dfrac{\pi}{2} = (n+1)W_nW_{n+1} \sim_{n\to+\infty} (n+1)W_n^2 \sim_{n\to+\infty} nW_n^2$ *donc la suite* (nW_n^2) *converge vers* $\dfrac{\pi}{2}$ *donc* $W_n^2 \sim_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{2n}$ *et* $W_n \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

R 10 *On sait que pour tout n,* $W_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}W_n$ *donc* $W_2=\frac{1}{2}W_0, W_4=\frac{3}{4}W_2,\ldots,W_{2n}=\frac{2n-1}{2n}W_{2n-2}$ *donc* $W_{2n}=\dfrac{(2n-1)\times\cdots\times 3\times 1}{(2n)\times\cdots\times 4\times 2}W_0$ *donc*
$W_{2n}=\dfrac{((2n-1)\times\cdots\times 3\times 1)\times((2n)\times\cdots\times 4\times 2)}{((2n)\times\cdots\times 4\times 2)^2}W_0$ $W_{2n}=\dfrac{(2n)!}{(2^n\times n\times\cdots\times 2\times 1)^2}W_0=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}\times(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. *On montre de même que* $W_{2n+1}=\dfrac{2^{2n}\times(n!)^2}{(2n+1)!}$.

R 11 *Commençons par rappeler que si* $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\dfrac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$. *On a donc* $W_{2n-2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{(1+\tan^2(x))^{n-1}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{(1+\tan^2(x))^n}(1+\tan^2(x))\,dx$. *Soit la fonction définie sur* $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ *par* $t(x)=\sqrt{n}\tan(x)$. *La fonction* t *est une bijection strictement monotone de classe* C^1 *de* $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $]0,+\infty[$ *et* $t'(x)=\sqrt{n}\,(1+\tan^2(x))$ *donc* $W_{2n-2}=\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\left(1+\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)^2\right)^n}\dfrac{1}{\sqrt{n}}dt$ *et donc* $I_n=\sqrt{n}W_{2n-2}$.

R 12 $I_n=\sqrt{n}W_{2n-2}$. *Or* $W_n\sim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ *donc* $W_{2n-2}\sim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}}\sim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ *doù* $I_n\sim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}(I_n)=I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

R 13 *Avec le changement de variable* $u(t)=\sqrt{t}$, *on trouve que* $J=\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-t}\dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt=2I$ *(fait en cours).*
Sous réserve de convergence, $K=\int_0^{+\infty}t^2e^{-t^2}dt=\left[\frac{1}{2}te^{-t^2}\right]_0^{+\infty}+\dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$ *(IPP* $\left\{\begin{array}{ll} u(t)=\frac{-1}{2}e^{-t^2} & v(t)=t\\ u'(t)=te^{-t^2} & v'(t)=1\end{array}\right.$ *).*
On a $\lim\limits_{t\to+\infty}te^{-t^2}=0$ *(CC) et* $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt$ *converge donc l'intégrale* K *est convergente et* $K=\dfrac{I}{2}$.

Deuxième partie: moments de la densité gaussienne

R 14 *C'est un résultat de cours que* $x\mapsto e^{-x}$ *est intégrable sur* $[0,+\infty[$ *(elle est bien sûr continue et positive sur cet intervalle), et on a:*

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty}=1,$$

donc g *est une densité sur* $[0,+\infty[$.
Nous allons à présent montrer à la fois l'existence des moments d'ordre n *pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *et les calculer, grâce à une récurrence sur* $n\in\mathbb{N}$. *Pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *soit* P_n *la proposition:*

$$''\ x\mapsto x^ng(x)\text{ est intégrable sur }[0,+\infty[,\text{ et on a: }m_n(g)=n!.\ ''$$

Nous venons de justifier P_0. *Montrons l'hérédité de la proposition: soit* $n\in\mathbb{N}$ *tel qu'on ait* P_n. *Pour tout* $t\geqslant 0$, *l'application* $x\mapsto x^{n+1}g(x)$ *est continue sur le segment* $[0,t]$, *en tant que produit d'une application polynomiale et de* g; *on intègre par parties, en intégrant* g *(qui est continue sur* $[0,t]$ *et de primitive* $x\mapsto -e^{-x}$*) et en dérivant* $x\mapsto x^{n+1}$ *(qui est de classe* C^1 *sur* $[0,t]$ *et de dérivée de* $x\mapsto(n+1)x^n$*). On a alors:*

$$\int_0^{+\infty}x^{n+1}g(x)\mathrm{d}x=\left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}(n+1)x^n(-e^{-x})\mathrm{d}x.$$

On a, par croissances comparées: $\lim\limits_{t\to+\infty}t^{n+1}e^{-t}=0$. *Par hypothèse de récurrence,* $\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}\mathrm{d}x$ *existe donc* $\int_0^{+\infty}x^{n+1}g(x)\mathrm{d}x$ *existe, donc* $x\mapsto x^{n+1}g(x)$ *est intégrable sur* $[0,+\infty[$, *et d'autre part que:*

$$m_{n+1}(g)=(n+1)n!=(n+1)!,$$

d'où P_{n+1}.
Ayant l'initialisation et l'hérédité, par récurrence nous avons montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, *le moment d'ordre* n *de* g *est fini, et on a:*

$$m_n(g) = n!$$

R 15 *La fonction* φ *est continue et positive sur* $\mathbb{R}$. *On effectue le changement de variable défini par* $u(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ *de classe* C^1 *et strictement monotone:*
$I''' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = I''$. *Le changement de variable défini par* $v(u) = -u$ *donne* $I' = \int_{-\infty}^{0} e^{-u^2} du = \int_{0}^{+\infty} e^{-v^2} dv = I$. *L'intégrale* I *converge donc* I' *converge donc* I'' *converge donc* I''' *converge donc* φ *(qui est positive) est intégrable sur* $\mathbb{R}$ *et* $I''' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times 2I = 1$ *donc* φ *est une densité.*

R 16 *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *L'application* $x \mapsto |x|^n \varphi(x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et au voisinage de* $+\infty$ *on a:*

$$|x|^n \varphi(x) = o_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Cela provient du théorème des croissances comparées: on a $\lim\limits_{x \to +\infty} |x|^{n+2} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$.
Or la fonction de Riemann $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ *est continue et intégrable au voisinage de* $+\infty$ *car* $2 > 1$, *donc l'application* $x \mapsto x^n \varphi(x)$ *est aussi intégrable au voisinage de* $+\infty$ *par comparaison des fonctions intégrables.*
De plus l'application $x \mapsto |x|^n \varphi(x)$ *est paire sur* $\mathbb{R}$, *donc les intégrales* $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |x|^n \varphi(x) \mathrm{d}x$ *et* $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} |x|^n \varphi(x) \mathrm{d}x$ *sont de même nature, comme on le voit en faisant le changement de variable* $x \mapsto -x$. *La seconde converge d'après ce qui précède, donc la première converge également.*
Puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} |x|^n \varphi(x) \mathrm{d}x$ *et* $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} |x|^n \varphi(x) \mathrm{d}x$ *convergent, on en déduit que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n \varphi(x) \mathrm{d}x$ *converge et donc l'application* $x \mapsto x^n \varphi(x)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$.
On en déduit que φ *admet des moments d'ordre* n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

R 17 *Pour tout* $p \in \mathbb{N}$, *l'entier* $2p+1$ *est impair, donc* $x \mapsto x^{2p+1}$ *est une fonction impaire. De plus* φ *est paire, donc pour tout* $p \in \mathbb{N}$ *leur produit* $x \mapsto x^{2p+1} \varphi(x)$ *est une fonction impaire. On en déduit (changement de variable* $u = -x$*) que*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad m_{2p+1}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p+1} \varphi(x) \mathrm{d}x = 0.$$

R 18 *On vient de voir que* $m_0(\varphi) = 1$.
Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *On a:* $m_{2p}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} \varphi(x) \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} x^{2p} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} x^{2p-1} \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \mathrm{d}x$.
Nous allons intégrer par parties. Soit $t \geqslant 0$. *L'application* $x \mapsto x^{2p-1}$ *est de classe* C^1 *sur* $[0, t]$, *de dérivée* $x \mapsto (2p-1) x^{2p-2}$; *l'application* $x \mapsto -x e^{-\frac{x^2}{2}}$ *est continue sur* $[0, t]$, *et admet pour primitive* $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$. *On dérive la première et intègre la seconde, et la formule de l'intégration par parties donne:*

$$\int_{0}^{+\infty} x^{2p-1} \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \mathrm{d}x = \left[x^{2p-1} e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{0}^{+\infty} - (2p-1) \int_{0}^{t} x^{2p-2} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x.$$

On a, par croissances comparées: $\lim\limits_{t \to +\infty} t^{2p-1} e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$. *Donc, quand* $t \to +\infty$, *la relation donne:*

$$m_{2p}(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \times (2p-1) \int_{0}^{+\infty} x^{2p-2} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = (2p-1) m_{2p-2}(\varphi).$$

Ainsi la suite $\left(m_{2p}(\varphi)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ *vérifie une relation de récurrence. Nous allons montrer, par récurrence sur* $p \in \mathbb{N}$*, que:*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad m_{2p}(\varphi) = \frac{(2p)!}{2^p p!}.$$

Si $p = 0$*, on l'a déjà établi, puisque* $m_0(\varphi) = 1$ *et* $\dfrac{(2\cdot 0)!}{2^0 0!} = 1$*. Soit* $p \in \mathbb{N}$ *tel qu'on ait la relation* $m_{2p}(\varphi) = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$*. Alors, en utilisant la relation de récurrence précédente, on a:*

$$m_{2(p+1)}(\varphi) = (2(p+1)-1)m_{2p}(\varphi) = (2p+1)\frac{(2p)!}{2^p p!} = \frac{(2p+2)}{2(p+1)}(2p+1)\frac{(2p)!}{2^p p!} = \frac{(2(p+1))!}{2^{p+1}(p+1)!},$$

d'où l'égalité au rang $p+1$*.*
Nous avons démontré l'initialisation et l'hérédité, donc:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad m_{2p}(\varphi) = \frac{(2p)!}{2^p p!}.$$

R 19 *Prenons la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4x^2} & \text{si } |x| \geqslant 1, \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } |x| < 1. \end{cases}$$

La fonction f *est continue et positive sur* $\mathbb{R}$*, intégrable au voisinage de* $+\infty$ *et* $-\infty$ *grâce à l'intégrabilité de la fonction de Riemann* $x \mapsto \frac{1}{x^2}$*, donc intégrable sur* $\mathbb{R}$*. De plus:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty}\right) = \frac{1}{2}\times 2 = 1.$$

Tout ceci démontre que f *est bien une densité sur* $\mathbb{R}$*. Par contre, pour tout* x *au voisinage de* $+\infty$ *on a:* $x \cdot f(x) = \frac{1}{4x}$*, et la fonction de Riemann* $x \mapsto \frac{1}{x}$ *n'est pas intégrable au voisinage de* $+\infty$*: ainsi* f *n'admet pas de moment d'ordre* 1*.*

Exercice: extension de l'intervalle pour appliquer le th de convergence dominée

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} x^{\frac{1}{n}} \ln(x)\, dx$.

R 20 *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. La fonction* $x \mapsto x^{\frac{1}{n}} \ln(x)$ *est définie et continue sur* $\left]0, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{n}}\ln(x) = 0$ *donc la fonction admet un prolongement par continuité en* 0 *donc* I_n *existe*

R 21 *Posons* $u(x) = \ln(1+x)$*. La fonction* u *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}_+$ *et* $u''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} \leq 0$ *donc* u *est concave.*
Or $u(0) = 0$ *et* $u'(0) = 1$ *donc* $y = x$ *est l'équation de la tangente à la courbe* C_u *en* 0 *donc* $\forall x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$
On en déduit $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \leq e$*.*

R 22 *Appliquons le th de convergence dominée à* $f_n : \left\{ \begin{array}{c}]0,e[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left\{ \begin{array}{c} x^{\frac{1}{n}} \ln(x) \ \ si\ x \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ 0\ sinon \end{array} \right. \end{array} \right.$.

(H_1) : *CV simple: Soit* $x \in]0,e[$. *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *donc il existe un rang* n_0 *à partir duquel* $x \in \left]0, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$.
La limite éventuelle de $(f_n(x))$ *est donc la limite éventuelle de* $\left(x^{\frac{1}{n}}\ln(x)\right)$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \ln(x)$.
La suite de fonctions (f_n) *converge donc simplement vers* $f : x \mapsto \ln(x)$ *sur* $]0,e[$.
(H_2) : *si* $n \in \mathbb{N}^*$ f_n *et* f *sont continues par morceaux sur* $]0,e[$.
(H_3) : *domination: Posons* $\varphi(x) = e\,|\ln(x)|$
Si $x \in]0,e[$
si $x \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *alors* $\left|x^{\frac{1}{n}}\right| \leq \left|e^{\frac{1}{n}}\right| \leq e$ *donc* $|f_n(x)| = \left|x^{\frac{1}{n}}\ln(x)\right| \leq e\,|\ln(x)| = \varphi(x)$
si $x > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *donc* $|f_n(x)| = 0 \leq \varphi(x)$ *avec* φ *intégrable sur* $]0,e[$ *donc*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^e f_n(x)\,dx = \int_0^e f(x)\,dx = \int_0^e \ln(x)\,dx = [x\ln(x) - x]_{t\to 0}^{t\to e} = 0.$$

Exercice: Fonction dominante définie par morceaux

R 23 *Deux possibilités: étudier l'existence, pour* n *fixé de* I_n *et appliquer ensuite le théorème de convergence dominée ou appliquer directement le théorème de convergence dominée dont la conclusion 1 donne l'existence des* I_n.
Posons $f_n : \left\{ \begin{array}{l} [0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^{1+\frac{1}{n}}e^{-t} \end{array} \right.$.
(H_1) : *CV simple: Soit* $t \geq 0$.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} t^{1+\frac{1}{n}} = t$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = te^{-t}$.
La suite de fonctions (f_n) *converge donc simplement vers* $f : t \mapsto te^{-t}$ *sur* $[0,+\infty[$.
(H_2) : *continuité de* f_n *et* f *(découle des théorème sur les opérations sur fonctions continues.*
(H_3) : *Domination*
On a $n \geq 1$ *donc* $0 < \dfrac{1}{n} \leq 1$ *donc* $1 \leq 1 + \dfrac{1}{n} \leq 2$.
On en déduit que si $t \in [0,1]$, $0 \leq t^{1+\frac{1}{n}} \leq t$ *et si* $t > 1$ *alors* $0 \leq t^{1+\frac{1}{n}} \leq t^2$
Posons $\varphi(t) = \left\{ \begin{array}{l} te^{-t}\ si\ t \in [0,1] \\ t^2e^{-t}\ si\ t > 1 \end{array} \right.$.
La fonctions φ *est continue par morceaux sur* $[0,+\infty[$ *et si* $t > 1$, $\dfrac{\varphi(t)}{\dfrac{1}{t^2}} = t^4e^{-t} \to_{t\to+\infty} 0$ *donc* $\varphi(t) = o_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$
donc φ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$ *donc sur* $[0,+\infty[$.
On en déduit que
$(C1)$: *pour tout* n, f_n *est intégrable et* f *sont intégrables.*
$(C2)$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ *soit* $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} te^{-t}dt = 1$ *(calcul par IPP en dérivant* t*).*