DM 15 pour le 31 janvier 2025

Exercice 1: exercice 45 du chapître "suites de fonctions"

Problème: Différentes façons d'obtenir des inégalités de concentration

Soit $p \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit S_n une variable aléatoire qui suit la loi de binomiale de paramètres n et p.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Plusieurs inégalités de Markov pour un même problème

Dans cette section $a \in]0,1[$.

Q 1 *Montrer que* $P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq \dfrac{p}{a} : (\mathcal{I}_1)$.

Q 2 *Retrouver la valeur de* $E\left(S_n^2\right)$ *en utilisant des résultats de cours.*
En déduire que $P\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq \dfrac{\dfrac{1}{n}p + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)p^2}{a^2} : (\mathcal{I}_2)$.

Q 3 *Les réels a et p étant fixés, pour quelles valeurs de n l'inégalité $(\mathcal{I}_2)$ donne-t-elle un meilleur résultat que $(\mathcal{I}_1)$?*

Utilisation de l'inégalité de Markov pour majorer $P(X \leq a)$.

Q 4 *On pose* $T_n = 1 - \dfrac{S_n}{n}$.
Soit $a \in]0,1[$. Montrer que $P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq \dfrac{1-p}{1-a}$

Q 5 *On pose $Y = e^{-X}$. Justifier que Y est d'espérance finie et calculer $E(Y)$.*
Soit $a > 0$. Montrer que $P(X \leq a) \leq e^{a - \lambda + \frac{\lambda}{e}}$.

Utilisation de l'inégalité de l'ingalité de Bienaymé-Cebychev pour majorer $P(X \leq a)$ et $P(X \geq a)$.

Q 6 *Soit $a > \lambda$. Déterminer un réel b tel que l'événement $(X \geq a)$ soit contenu dans l'événement $(|X - E(X)| \geq b)$.*

Q 7 *En déduire une majoration de $P(X \geq a)$ en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Cebychev*

Q 8 *Soit $a < \lambda$. En procédant comme dans la question précédente une majoration de $P(X \leq a)$.*

Conclusion

- Si f est croissante et positive, on peut appliquer l'inégalité de Markov à $Y = f(X)$ pour majorer $P(X \geq a)$.
- Si f est décroissante et positive, on peut appliquer l'inégalité de Markov à $Y = f(X)$ pour majorer $P(X \leq a)$.
- On peut retrancher $E(X)$ dans les inégalités $X \leq a$ ou $X \geq a$ pour se ramener à l'inégalité de Bienaymé Cebychev.

Introduction d'une famille de variable aléatoire pour obtenir une famille d'inégalités dont on retient la plus précise

On suppose que $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p et $a \in]0,p[$.

Q 9 *Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{N}^*$, calculer $g(t) = E\left(e^{-tX_i}\right)$.*

Q 10 *En déduire que $E\left(e^{-t\frac{S_n}{n}}\right) = \left(g\left(\dfrac{t}{n}\right)\right)^n$.*

Q 11 *On suppose $t > 0$. Montrer que $P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{at}\left(g\left(\dfrac{t}{n}\right)\right)^n$.*

Q 12 *Déterminer une fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\forall t \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(e^{at}\left(g\left(\dfrac{t}{n}\right)\right)^n\right) = n\varphi\left(\frac{t}{n}\right)$.*
Etudier les variations de la fonction φ et en déduire que φ admet un minimum strictement négatif sur $\mathbb{R}_+$.

Q 13 *Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq e^{-nM}$.*

Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur $]0,1]$ par $f(x) = x \times \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

On rappelle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Q 14 *Justifier que la fonction f est continue par morceaux sur $]0,1]$.*

Q 15 *Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Montrer que $\int_{\frac{1}{p}}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2}(p-1) \times \frac{1}{p^2}$.*

Q 16 *En déduire que f est intégrable et donner la valeur de $\int_0^1 x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor dx$.*

Exercice 1:

1. La fonction g est croissante et continue donc $g(I) = [g(0), g(2)] = [0,2] \subset I$.
   On a $g(x) - x = \sqrt{2+x} - x = \dfrac{2+x-x^2}{\sqrt{2+x}+x}$. L'équation $x^2 - x - 2 = 0$ admet -1 et 2 comme solutions donc $x^2 - x - 2 \leq 0$ si $x \in [-1,2]$ donc g est positive.sur l'intervalle I.

2. Soit $t \in [0,2]$ fixé.
   (a) On a $f_{n+1}(t) = g(f_n(t))$ et $f_0(t) = t \in I$ donc, comme $g(I) \subset I$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) \in I$ (récurrence immédiate).
   On déduit de la question précédente que $g(f_n(t)) \geq f_n(t)$ donc la suite $(f_n(t))$ est croissante et majorée par 2 donc converge.
   (b) Soit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)$. La fonction g est continue donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g(f_n(t)) = g(l)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_{n+1}(t) = l$ donc $l = g(l)$ donc $g(l) - l = 0$ donc $l = 2$ ou $l = -1$ (voir Q1) donc $l = 2$ car $l \geq 0$).
   (c) Le raisonnement est valable pour tout $t \in I$ donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f constante égale à 2.

3. Si $t \in I$, $2+t > 0$ donc g est dérivable sur I et $g'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}$. $t \geq 0$ entraîne $2\sqrt{1+t} \geq 2 > 0$ donc $0 < g'(t) \leq \dfrac{1}{2}$.
   On a $f(t) = 2$ donc $g(f(t)) = f(t)$ donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, $|f_{n+1}(t) - f(t)| = |g(f_n(t)) - g(f($
   $\dfrac{1}{2}|f_n(t) - f(t)|$

4. On a donc $|f_n(t) - f(t)| \leq \dfrac{1}{2}|f_{n-1}(t) - f(t)| \leq \cdots \leq \dfrac{1}{2^n}|f_0(t) - f(t)| \leq \dfrac{2}{2^n}$ car $f_0(t) = t \in I$ et $f(t) = 2$.
   On en déduit que $\|f_n - f\|_\infty \leq \dfrac{1}{2^n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ donc la suite (f_n) converge uniformément vers f.

5. La fonction f_0 est continue et $f_1 = \sqrt{2+f_0}$ donc f_1 est continue. Par récurrence, on montre que pour tout n, f_n est continue sur I.
   La suite (f_n) converge uniformément vers f.donc la suite $\left(\int_0^2 f_n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^2 f(t)\,dt = 4$

Problème:

.1 Plusieurs inégalités de Markov pour un même problème

R 1 *D'après le cours, $E(S_n) = np$ donc, par linéarité de l'espérance, $E\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = p$.*

Or $\dfrac{S_n}{n} \geq 0$ et $\dfrac{S_n}{n}$ prend un nombre fini de valeurs donc est d'espérance finie donc d'après l'inéglaité de Markov,

$$P\left(\tfrac{S_n}{n} \geq a\right) \leq \frac{E\left(\dfrac{S_n}{n}\right)}{a} = \frac{p}{a}.$$

R 2 *$V(S_n) = np(1-p)$ donc $E\left(S_n^2\right) = V(S_n) + E(S_n)^2 = np(1-p) + (np)^2 = np + \left(n^2 - n\right)p^2$.*
On a $\frac{S_n}{n} \geq a \Leftrightarrow \left(\frac{S_n}{n}\right)^2 \geq a^2$ car $S_n \geq 0$ donc

$$P\left(\tfrac{S_n}{n} \geq a\right) = P\left(\left(\tfrac{S_n}{n}\right)^2 \geq a^2\right) \leq \frac{E\left(\left(\dfrac{S_n}{n}\right)^2\right)}{a^2} = \frac{\dfrac{1}{n^2}E\left(S_n^2\right)}{a^2} = \frac{\dfrac{1}{n}p + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)p^2}{a^2}.$$

R 3 *On a* $\dfrac{\dfrac{1}{n}p + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)p^2}{a^2} < \dfrac{p}{a} \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)p < a \Leftrightarrow \dfrac{1}{n}(1-p) < a - p : (\mathcal{I})$
Si $a < p$, $(\mathcal{I})$ n'est jamais vérifiée donc $(\mathcal{I}_2)$ n'est jamais plus précise que $(\mathcal{I}_1)$
Si $a > p$, $(\mathcal{I}) \Leftrightarrow n > \dfrac{a-p}{1-p}$ et c'est la condition pour que $(\mathcal{I}_2)$ soit plus précise que $(\mathcal{I}_1)$

.2 Utilisation de l'inégalité de Markov pour majorer $P(X \leq a)$.

R 4 *On a* $\frac{S_n}{n} \leq a \Leftrightarrow 1 - \dfrac{S_n}{n} \geq 1 - a$ *donc* $P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) = P(T_n \geq 1 - a)$. *Or* $0 \leq S_n \leq n$ *donc* $T_n \geq 0$ *et* T_n *prend un nombre fini de valeurs donc est d'espérance finie donc* $P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) = P(T_n \geq a) \leq \dfrac{E(T_n)}{1-a}$. *Or* $E(T_n) = E\left(1 - \dfrac{S_n}{n}\right) = 1 - E\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = 1 - p$ *donc* $P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) \leq \dfrac{1-p}{1-a}$.

R 5 *On a* $X \geq 0$ *donc* $0 \leq e^{-X} \leq 1$ *donc* Y *est bornée donc d'espérance finie.*
Par la formule du transfert, $E(Y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-n} P(X = n) = e^{-\lambda} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \dfrac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\frac{\lambda}{e}} = e^{-\lambda + \frac{\lambda}{e}}$.
On a $X \leq a \Leftrightarrow -X \geq -a$ *donc* $e^{-X} \geq e^{-a}$ *et* $Y \geq 0$ *et d'espérance finie donc (Markov)*
Soit $a > 0$. *Montrer que* $P(X \leq a) = P(Y \geq e^{-a}) \leq \dfrac{E(Y)}{e^{-a}} = e^{a - \lambda + \frac{\lambda}{e}}$.

.3 Utilisation de l'inégalité de l'ingalité de Bienaymé-Cebychev pour majorer $P(X \leq a)$ et $P(X \geq a)$.

R 6 *Soit* $a > \lambda$. *On a* $X \geq a \Leftrightarrow X - \lambda \geq a - \lambda$ *et* $E(X) = \lambda$ *et* $a - \lambda > 0$ *donc* $(X \geq a) = (X - E(X) \geq a - \lambda) \subset (|X - E(X)| \geq a - \lambda)$.

R 7 *On en déduit que* $P(X \geq a) \leq P(|X - E(X)| \geq a - \lambda) \leq \dfrac{V(X)}{(a-\lambda)^2} = \dfrac{\lambda}{(a-\lambda)^2}$.

R 8 *De même si* $a < \lambda$ $P(X \leq a) = P(X - E(X) \leq a - \lambda)$ *et* $a - \lambda < 0$ *donc* $(X - E(X) \leq a - \lambda) \subset (|X - E(X)| \geq \lambda - a)$ *donc* $P(X \leq a) \leq P(|X - E(X)| \geq \lambda - a) \leq \dfrac{\lambda}{(a-\lambda)^2}$.

.4 Introduction d'une famille de variable aléatoire pour obtenir une famille d'inégalités dont on retient la plus précise

R 9 *On a* $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$ *donc, par la formule du transfert,* $E\left(e^{tX}\right) = e^0 P(X = 0) + e^{-t} P(X = 1) = (1-p) + pe^{-t} = g(t)$.

R 10 $(X_1, \ldots, X_n)$ *une famille de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre* p.
D'après le cours, $X_1 + \cdots + X_n \sim B(n, p)$ *donc* $X_1 + \cdots + X_n$ *et* S_n *ont la même loi donc* $E\left(e^{-t\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}}\right) = E\left(e^{-t\frac{S_n}{n}}\right)$.
Or $e^{-t\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}} = e^{-t\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}} e^{-t\frac{X_1}{n}} \times \cdots \times e^{-t\frac{X_n}{n}}$ *et les V.A.* $X_1, \ldots, X_n$ *sont indépendantes donc les variables aléatoires* $e^{-t\frac{X_1}{n}}, e^{-t\frac{X_2}{n}}, \ldots, e^{-t\frac{X_n}{n}}$ *sont indépendantes donc* $E\left(e^{-t\frac{S_n}{n}}\right) = E\left(e^{-t\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}}\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} E\left(e^{-t\frac{X_i}{n}}\right) = \left(g\left(\dfrac{t}{n}\right)\right)^n$.

R 11 *Si* $t > 0$ *alors* $\frac{S_n}{n} \leq a \Leftrightarrow -t\frac{S_n}{n} \geq -ta \Leftrightarrow e^{-t\frac{S_n}{n}} \geq e^{-ta}$ *donc* $P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) = P\left(e^{-t\frac{S_n}{n}} \geq e^{-ta}\right)$.
La variable aléatoire finie $e^{-t\frac{S_n}{n}}$ *est positive donc, d'après l'inégalité de Markov,*
$P\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) = P\left(e^{-t\frac{S_n}{n}} \geq e^{-ta}\right) \leq \dfrac{E\left(e^{-t\frac{S_n}{n}}\right)}{e^{-ta}} = e^{at}\left(g\left(\dfrac{t}{n}\right)\right)^n$.

R 12 *Pour* $t \geq 0$, $\ln\left(e^{at}\left(g\left(\dfrac{t}{n}\right)\right)^n\right) = at + \ln\left(\left(g\left(\dfrac{t}{n}\right)\right)^n\right) = at + n\ln\left(g\left(\dfrac{t}{n}\right)\right) = n\left(a\dfrac{t}{n} + \ln\left(g\left(\dfrac{t}{n}\right)\right)\right) = n\varphi\left(\dfrac{t}{n}\right)$ *avec* $\varphi : t \mapsto at + \ln(g(t))$ *et* $g(t) = (1-p) + pe^{-t}$.
On a $g(0) = 1$ *donc* $\varphi(0) = 0$
On a $g(t) \geq 1 - p > 0$. *On en déduit que* φ *est* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+$ *et* $\varphi'(t) = a + \dfrac{g'(t)}{g(t)} = a - \dfrac{pe^{-t}}{g(t)}$ *donc* $\varphi'(0) = a - p < 0$ *et comme* φ' *est continue,* $\exists \alpha > 0$ *tel que* $\forall x \in [0, \alpha]$, $\varphi'(x) < 0$ *donc*
φ *est strictement décroissante sur* $[0, \alpha]$ *donc* $\varphi(\alpha) < 0$.
De plus, $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 1 - p$ *donc* $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$ *donc* $\exists B > 0$, $\forall x \geq B$, $\varphi(x) \geq 0$ *(donc* $B \geq \alpha$*).*
La fonction φ *est continue sur* $[0, B]$ *donc admet un minimum sur* $[0, B]$ *atteint en* $x_0 \in [0, B]$. *On a donc* $0 > \varphi(\alpha) \geq \varphi(x_0)$.
Ce minimum est le minimum de φ *sur* $\mathbb{R}_+$ *car si* $s \geq B$, *alors* $\varphi(x) \geq 0$.

R 13 *L'inégalité* $P\left(\frac{S_n}{n}\leq a\right)\leq e^{at}\left(g\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n=e^{n\varphi\left(\frac{t}{n}\right)}$ *est valable pour tout* $t>0$ *donc pour* $t=nx_0$. *On a donc* $P\left(\frac{S_n}{n}\leq a\right)\leq e^{n\varphi(x_0)}=e^{-nM}$ *avec* $M=-\varphi(x_0)>0$.

Exercice 2:

R 14 *La fonction* $f:x\mapsto x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$ *est continue en tout* x *tel que* $\dfrac{1}{x}\notin\mathbb{N}^*$ *donc est continue sur tout intervalle* $\left]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right[$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ *et admet une limite réelle aux bornes de cet intervalle. Elle est donc continue par morceaux sur tout segment* $\left[\frac{1}{p},1\right]$ $(p\in\mathbb{N}^*)$ *donc sur tout segment* $[a,b]$ *de* $]0,1]$. *Elle est donc continue par morceaux sur* $]0,1]$.

R 15 *Soit* $p\in\mathbb{N}^*,p\geq 2$. *On a* $\int_{\frac{1}{p}}^{1}f(x)\,dx=\sum\limits_{k=1}^{p-1}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}f(x)\,dx$. *Si* $\frac{1}{k+1}<x\leq\frac{1}{k}$, *alors* $k\leq\frac{1}{x}<k+1$ *donc* $f(x)=kx$ *donc* $\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}f(x)\,dx=k\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}xdx=k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}=\dfrac{k}{2}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$. *On en déduit que* $\int_{\frac{1}{p}}^{1}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{p-1}k\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=$ $\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{k=1}^{p-1}k\times\frac{1}{k^2}-\sum\limits_{k=1}^{p-1}k\times\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{k=1}^{p-1}k\times\frac{1}{k^2}-\sum\limits_{k=2}^{p}(k-1)\times\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k^2}-(p-1)\times\frac{1}{p^2}\right)$

R 16 *La fonction* f *étant positive la fonction* $F:x\mapsto\int_x^1 x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor dx$ *est décroissante donc admet une limite* l *réelle ou* $+\infty$ *en* 0.
Par composition des limites, $F\left(\frac{1}{p}\right)\to_{p\to+\infty}l$ *et d'après la question précédentes,* $F\left(\frac{1}{p}\right)\to_{p\to+\infty}\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.
On en déduit que l *est réelle donc* $\int_0^1 x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor dx$ *est convergente de valeur* $\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$
Comme f *est positve, la convergence de* $\int_0^1 x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor dx$ *équivaut à l'intégrabilité de* f..