PSI DS6 bis le 12 février 2025 durée 3h

Le sujet comporte 4 pages

Les calculatrices sont interdites

- Les solutions devront être présentées **dans l'ordre de l'énoncé** (quitte à laisser des blancs pour compléter plus tard), rédigées avec une **encre foncée**.
- Ce qui est écrit sur une page ne devra pas dépasser sur la page située à côté.
- Chaque fois que le résultat d'une question précédente sera utilisé (ce qui est possible même si la question n'a pas été traitée), **le numéro de cette question** devra être mentionné clairement
- Les théorèmes utilisés devront être mentionnés explicitement et leurs hypothèses seront mentionnées, et, si nécessaire, vérifiées avec soin. Les solutions doivent être rédigées de manière claire, compréhensible et rigoureuse ; il en sera tenu le plus grand compte dans la notation finale.
- **Les résultats seront encadrés**.

Exercice:

Le but de cette partie est de montrer que $\int_0^{+\infty} \cos\left(\sqrt{t}\right) e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$.

Q 1 *Montrer que* $\forall t \geq 0,$ *on a* $\cos\left(\sqrt{t}\right) e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(2n)!} e^{-t}$.

Q 2 *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ *est intégrable sur* $[0, +\infty[$ *et calculer* $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

Q 3 *En déduire que l'intégrale généralisée* $\int_0^{+\infty} \cos\left(\sqrt{t}\right) e^{-t} dt$ *converge et que* $\int_0^{+\infty} \cos\left(\sqrt{t}\right) e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$.

Problème:

Notations et rappels

- Pour n et p deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{V}_{n,p}$ l'ensemble fini des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\{-1, 1\}$.
- Toutes les variables aléatoires considérées dans le problème sont supposées discrètes et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- Étant donné une variable aléatoire réelle Z, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(Z)$ son espérance et $\mathbb{V}(Z)$ sa variance.

I Matrices aléatoires à coefficients dans $\{-1, 1\}$

I.A – Quelques résultats algébriques

Soit $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $V = \sum_{k=1}^{n} E_k$.

Q 4 *Pour* $i \in [[1, n]]$, *exprimer* E_i *en fonction de* V *et de* $V - 2E_i$. *En déduire que* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = vect\left(\mathcal{V}_{n,1}\right)$.

Soient $C_1, \ldots, C_n$, n matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, avec C_1 non nulle.

Q 5 *Démontrer que, si la famille* $(C_1, \ldots, C_n)$ *est liée, alors il existe un unique* $j \in [[1, n-1]]$ *tel que*

$$\begin{cases} (C_1, \ldots, C_j) \text{ est libre} \\ C_{j+1} \in vect(C_1, \ldots, C_j) \end{cases}$$

Soit $d \in [[1, n]]$, $(U_1, \ldots, U_d)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $H = vect(U_1, \ldots, U_d)$.

Q 6 *Démontrer qu'il existe des entiers* $i_1, \ldots, i_d$ *vérifiant* $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n$ *tels que l'application*

$$\left| \begin{array}{ccc} H & \to & \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_d} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

soit bijective. (On pourra s'intéresser au rang de la matrice de $M_{n,d}(R)$ *dont les colonnes sont* $U_1, \ldots, U_d$*.)*

Q 7 *Soit* $\mathcal{W}$ *un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *de dimension* d*. Déduire de la question précédente que l'ensemble* $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}_{n,1}$ *est de cardinal inférieur ou égal à* 2^d*.*

I.B – Une loi de probabilité

On dit qu'une variable réelle X suit la loi $\mathcal{R}$ si et seulement si:

$$X(\Omega) = \{-1, 1\}, \qquad \mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Q 8 *Si* X *suit la loi* $\mathcal{R}$*, préciser la loi de la variable aléatoire* $\frac{1}{2}(X+1)$*.*

Q 9 *Calculer l'espérance et la variance d'une variable suivant la loi* $\mathcal{R}$*.*

Q 10 *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires réelles indépendantes, suivant chacune la loi* $\mathcal{R}$*. Déterminer la loi de leur produit* XY*.*

I.C – Un premier procédé de génération de matrices aléatoires à coefficients dans $\{-1, 1\}$

Jusqu'à la fin de la partie I, n est un entier naturel non nul et on considère une famille $(m_{i,j})_{(i,j) \in [[1,n]]^2}$ de n^2 variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{R}$.

La variable aléatoire matricielle $M_n = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est alors à valeurs dans $\mathcal{V}_{n,n}$.

On pose $\tau_n = tr\,(M_n)$ et $\delta_n = \det\,(M_n)$.

Q 11 *Calculer l'espérance et la variance de la variable* τ_n*.*

Q 12 *Calculer l'espérance de la variable* δ_n *(on pourra développer* δ_n *suivant une ligne).*

Q 13 *Démontrer que la variance de la variable* δ_n *est égale à* $n!$ *(on pourra raisonner par récurrence).*

I.D – Etude d'un cas particulier.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.
Soit $\mathcal{N}_n$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{R})$.

Q 14 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Montrer que si* A *est nilpotente, alors* 0 *est une valeur propre de* A *et que c'est la seule valeur propre complexe de* A*.*

Q 15 *Déterminer la trace et le déterminant d'une matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *nilpotente.*

Q 16 *Démontrer qu'une matrice* M *de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *est nilpotente si et seulement si* $\det(M) = tr(M) = 0$*.*

On suppose que $n = 2$ et m_{11}, m_{12}, m_{21} et m_{22} sont quatre variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi $\mathcal{R}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$.

Q 17 *Calculer la probabilité de l'événement:* $(M_2 \in \mathcal{N}_2)$.

Q 18 *Calculer la probabilité de l'événement:* $(M_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$.

I.E – Une généralisation

L'objectif de cette sous-partie est de prolonger le dernier résultat de la partie précédente, en trouvant, dans le cas général où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 , un minorant de la probabilité de l'évènement: $(M_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$.

I.E.1) On considère une famille $(c_1, c_2, \ldots, c_n, c'_1, c'_2, \ldots, c'_n)$ de $2n$ variables aléatoires réelles indépendantes, suivant toutes la loi $\mathcal{R}$.

Q 19 *Calculer, pour* $i \in [[1, n]]$, $\mathbb{P}\big((c_i = c'_i)\big)$.

On considère les matrices colonnes aléatoires $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ et $C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}$.

Q 20 *Démontrer que, pour tout* $\omega \in \Omega$, *la famille* $\big(C(\omega), C'(\omega)\big)$ *est liée si et seulement s'il existe* $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ *tel que* $C'(\omega) = \varepsilon C(\omega)$.

Q 21 *En déduire la probabilité de l'événement: "la famille* (C, C') *est liée".*

I.E.2) On rappelle que $(m_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$ est une famille de n^2 variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{R}$ et $M_n = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice aléatoire à valeurs dans $\mathcal{V}_{n,n}$ dont le coefficient situé à la ligne i et la colonne j est, pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$, égal à $m_{i,j}$.
On note

$$C_1 = \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}, \ldots, C_n = \begin{pmatrix} m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,n} \end{pmatrix}$$

les variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{V}_{n,1}$ constituées par les colonnes de la matrice M_n.

Pour tout $j \in [[1, n-1]]$, on note R_j l'événement: " la famille $(C_1, \ldots, C_j)$ est libre et $C_{j+1} \in vect(C_1, \ldots, C_j)$"
on note R_n l'événement: "la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ est libre".

Q 22 *Montrer que* $(R_1, \ldots, R_n)$ *est un système complet d'événements.*

Q 23 *Montrer que* $\mathbb{P}\big(M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big) \leq \sum\limits_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(C_{j+1} \in vect(C_1, \ldots, C_j)\big)$.

Q 24 *Justifier que, pour tout* $j \in [[1, n-1]]$,

$$\mathbb{P}\big(C_{j+1} \in vect(C_1, \ldots, C_j)\big) = \sum_{(v_1,\ldots,v_j)\in\mathcal{V}_{n,1}^j} \mathbb{P}\big(C_{j+1} \in vect(v_1, \ldots, v_j)\big) \times \mathbb{P}\big((C_1 = v_1) \cap \cdots \cap (C_j = v_j)\big).$$

Q 25 *En déduire que, pour tout* $j \in [[1, n-1]]$, $\mathbb{P}\big(C_{j+1} \in vect(C_1, \ldots, C_j)\big) \leq 2^{j-n}$.

Q 26 *En déduire que* $\mathbb{P}\big(M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.

II Vecteurs aléatoires unitaires

On suppose que n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On suppose que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est muni de son produit scalaire usuel noté $\langle\ \mid\ \rangle$.

On désigne par I une partie de $\mathbb{N}$ ayant au moins deux éléments et par $u = (u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs unitaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q 27 *Montrer que le réel* $C(u) = \sup\{|\langle u_i \mid u_j\rangle|\,,\ (i,j) \in I^2,\ i \neq j\}$ *existe et appartient à l'intervalle* $[0,1]$.

$C(u)$ s'appelle paramètre de cohérence de la famille $(u_i)_{i\in I}$.

Q 28 *Montrer que si* $C(u) = 0$, *alors l'ensemble* $\{u_i,\ i \in I\}$ *est fini et donner un majorant de son cardinal.*

Dans la suite, on considère un réel ε appartenant à l'intervalle $]0,1]$.

On se propose de démontrer que, pour tout entier naturel N inférieur ou égal à $\exp\left(\dfrac{\varepsilon^2 n}{4}\right)$, il existe une famille u de N vecteurs unitaires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $C(u) \leq \varepsilon$.

Q 29 *Démontrer que, pour tout nombre réel* t, $\cosh(t) \leq \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.

Soient $X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{R}$.
On définit les vecteurs aléatoires, $X = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(X_1,\dots,X_n)^\top$ et $Y = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(Y_1,\dots,Y_n)^\top$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q 30 *Démontrer que, pour tout nombre réel* t, $\mathbb{E}\big(\exp(t\langle X \mid Y\rangle)\big) = \left(\cosh\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$.

Q 31 *En déduire que, pour pour tout nombre réel* t, $\mathbb{E}\big(\exp(t\langle X \mid Y\rangle)\big) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2n}\right)$.

Q 32 *En appliquant l'inégalité de Markov à une variable aléatoire bien choisie, démontrer que*

$$\forall t > 0, \qquad \mathbb{P}(\langle X \mid Y\rangle \geq \varepsilon) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2n} - \varepsilon t\right).$$

Q 33 *En déduire que* $\mathbb{P}(\langle X \mid Y\rangle \geq \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right)$.

Q 34 *Montrer que* $\mathbb{P}(|\langle X \mid Y\rangle| \geq \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right)$.

Soit N un entier naturel non nul et $\left(X^i_j\right)_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq n}$ une famille de $n \times N$ variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $\mathcal{R}$.

Pour tout $i \in [[1,n]]$, soit le vecteur colonne $X^i = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(X^i_1,\dots,X^i_n)^\top$.

Q 35 *Déduire des questions précédentes que*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geq \varepsilon\right) \leq N(N-1)\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

Q 36 *On suppose que* $n \geq 4\dfrac{\ln N}{\varepsilon^2}$. *Démontrer que*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geq \varepsilon\right) < 1.$$

Q 37 *En déduire que, pour tout entier naturel* N *inférieur ou égal à* $\exp\left(\dfrac{\varepsilon^2 n}{4}\right)$, *il existe une famille de* N *vecteurs unitaires de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *dont le paramètre de cohérence est majoré par* ε.

PSI DS6 bis corrigé

Exercice:

R 1 *La fonction* $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ *est continue (th opérations) sur* $[0, +\infty[$ *et* $\dfrac{t^n e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{n+2}e^{-t} \to_{t\to+\infty} 0 : (CC)$ *donc* $t^n e^{-t} = o_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ *donc* g_n *est intégrable sur* $[1, +\infty[$ *donc sur* $[0, +\infty[$.
On a $I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-t}dt = \left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^{+\infty} + (n+1)\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$. *On a* $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{n+1}e^{-t} = 0 : (CC)$ *donc* $I_{n+1} = (n+1)\, I_n$. *De plus,* $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$.
On en déduit $I_n = nI_{n-1} = n\,(n-1)\, I_{n-2} = n\,(n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \times I_0 = n!$.

R 2 *On a, pour tout* x *réel,* $\cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ *donc si* $t \geq 0$, *alors* $\cos\left(\sqrt{t}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n \sqrt{t}^{2n}}{(2n)!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n t^n}{(2n)!}$
Posons, pour $t \geq 0$ $f(t) = \cos\left(\sqrt{t}\right) e^{-t}$. *On a donc* $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n t^n}{(2n)!} e^{-t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ *avec* $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n t^n}{(2n)!} e^{-t}$.
Appliquons le th d'interversion $\sum - \int$ *sur un intervalle quelconque:*
- Pour tout n, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} g_n$ *est continue (donc CPM) est intégrable sur* $[0, +\infty[$ *d'après Q1.*
- La série de fonctions $\sum u$ *converge simplement sur* $[0, +\infty[$ *et a pour somme.*f*:*
- La série numérique $\sum \left(\int_{[0,+\infty[} |u_n|\right)$ *converge: On a*
$\int_{[0,+\infty[} |u_n| = \int_{[0,+\infty[} \dfrac{1}{(2n)!} |g_n| = \dfrac{n!}{(2n)!} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} \leq \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \sim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}$ *donc la SATP* $\sum \int_{[0,+\infty[} |u_n|$ *converge.*
On en déduit que f *est intégrable sur* $[0, +\infty[$ *et* $\int_0^{+\infty} \cos\left(\sqrt{t}\right) e^{-t}dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} u_n(t)\, dt\right)$.
Or $u_n = (-1)^n |u_n|$ *donc* $\int_0^{+\infty} u_n(t)\, dt = (-1)^n \dfrac{n!}{(2n)!}$ *donc* $\int_0^{+\infty} \cos\left(\sqrt{t}\right) e^{-t}dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{n!}{(2n)!}$.

Problème: (adapté de centrale 1 PSI 2022)

R 3 *Soit* $i \in [[1, n]]$. *Les composantes de* V *valent toutes* 1 *et celles de* $V - 2E_i$ *valent* 1 *sauf la* $i^{\text{ème}}$ *qui vaut* -1.
On a donc $\begin{cases} E_i = \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}(V - 2E_i) \\ V - 2E_i \in \mathcal{V}_{n,1} \text{ et } V \in \mathcal{V}_{n,1} \end{cases}$ *donc* $E_i \in vect(\mathcal{V}_{n,1})$.
Comme $(E_1, \ldots, E_n)$ *engendre* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, *on a* $\boxed{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = vect(\mathcal{V}_{n,1})}$.

R 4 *notons* $(\mathcal{P}_j)$ *la propriété* $\begin{cases} (C_1, \ldots, C_j) \text{ est libre} \\ C_{j+1} \in vect(C_1, \ldots, C_j) \end{cases}$
Existence: soit $A = \{j \in [[1, n]], (C_1, \ldots, C_j) \text{ est libre}\}$. *L'ensemble* A *est non vide car* C_1 *est non nulle. Prenons donc* $j_0 = \max(A)$. *En particulier,* $(C_1, \ldots, C_{j_0})$ *est libre et* $(C_1, \ldots, C_n)$ *est supposée liée donc* $j_0 < n - 1$.
De plus, $(C_1, \ldots, C_{j_0+1})$ *est liée par maximalité de* j_0.
Ainsi, $\boxed{j_0 \text{ vérifie les conditions voulues}}$
Unicité: Soit $(i, j) \in [[1, n-1]]^2$ *tels que* $(\mathcal{P}_i)$ *et* $(\mathcal{P}_j)$ *sont vérifiés.*
si $i > j$ *alors* $(C_1, \ldots, C_{j+1})$ *est liée donc* $(C_1, \ldots, C_i)$ *est liée donc* $(\mathcal{P}_i)$ *n'est pas vérifiée*
si $i < j$ *alors* $(C_1, \ldots, C_j)$ *est libre donc* $(C_1, \ldots, C_{i+1})$ *est libre donc donc* $(\mathcal{P}_i)$ *n'est pas vérifiée.*
D'où l'unicité de j *vérifiant* $(\mathcal{P}_i)$.

R 5 *Soit M la matrice de la famille $(U_1,\ldots,U_d)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*
La famille $(U_1,\ldots,U_d)$ est libre donc $rg\,(M)=d$.
On en déduit qu'il existe d lignes de cette matrice qui forment une famille libre.
Soit $i_1,\ldots,i_d$ avec $1\le i_1<\cdots<i_d\le n$, les numéros de ces lignes.

Posons $U_k=\begin{pmatrix} x_1^{(k)}\\ \vdots\\ x_n^{(k)}\end{pmatrix}$ *et* $\varphi:\left|\begin{array}{ccc} H & \to & \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})\\ \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_{i_1}\\ \vdots\\ x_{i_d}\end{pmatrix}\end{array}\right.$. *On a* $\varphi(U_k)=\begin{pmatrix} x_{i_1}^{(k)}\\ \vdots\\ x_{i_d}^{(k)}\end{pmatrix}$ *donc la matrice M' dans la base canonique de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ de la famille $(\varphi(U_1),\ldots,\varphi(U_d))$ est la matrice extraite de M en ne conservant que les lignes $i_1,\ldots,i_d$ donc M' est de rang d donc la famille $(\varphi(U_1),\ldots,\varphi(U_d))$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ donc une base de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ (qui est de dimension d).*
La famille $(U_1,\ldots,U_d)$ est une famille libre de $H=vect(U_1,\ldots,U_d)$ donc est une base de H et φ transforme une base de H en une base de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ donc est un isomorphisme?

R 6 *Comme $\mathcal{W}$ est de dimension d, il existe une base $(U_1,\ldots,U_d)$ de $\mathcal{W}$.*
D'après la question précédente, il existe $1\le i_1<\cdots<i_d\le n$ tels que

$\varphi:\left|\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \to & \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})\\ \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_{i_1}\\ \vdots\\ x_{i_d}\end{pmatrix}\end{array}\right.$ *est un isomorphisme.*

Si $X\in\mathcal{W}\cap\mathcal{V}_{n,1}$, alors les composantes de X sont -1 ou 1 donc $\varphi(X)\in\mathcal{V}_{d,1}$. Or un élément de $\mathcal{V}_{d,1}$ peut être idenbtifié à une liste de longueur d d'éléments appartenant à $\{-1,1\}$ donc $card\,(\mathcal{V}_{d,1})=2^d$.
Comme φ est bijective $card\,(\mathcal{W}\cap\mathcal{V}_{n,1})\le 2^d$.

R 7 *Posons $Y=\frac{1}{2}(X+1)$.*
On a $X=-1\Leftrightarrow Y=0$ et $X=1\Leftrightarrow Y=1$ donc $Y(\Omega)=\{0,1\}$ et $\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{2}$.
La variable $\frac{1}{2}(X+1)$ suit la $\boxed{\text{loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}}$

R 8 *D'après le cours, $\mathbb{E}(Y)=p=\frac{1}{2}$ et $\mathbb{V}(Y)=pq=\frac{1}{4}$.*
Or $Y=\frac{1}{2}(X+1)$ donc $\mathbb{E}(Y)=\frac{1}{2}(\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(1))=\frac{1}{2}(\mathbb{E}(X)+1)$ et $\mathbb{V}(Y)=\frac{1}{4}\mathbb{V}(X)$.
On en déduit que $\boxed{\mathbb{E}(X)=0 \text{ et } \mathbb{V}(X)=1}$

R 9 *Soient X et Y suivant $\mathcal{R}$ et indépendantes. Notons $Z=XY$. Alors Z prend les valeurs 1 et -1.*
De plus, $(Z=1)=((X=1)\cap(Y=1))\cup((X=-1)\cap(Y=-1))$ et l'union est disjointe donc

$$\mathbb{P}(Z=1)=\mathbb{P}((X=1)\cap(Y=1))+\mathbb{P}((X=-1)\cap(Y=-1))=\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(X=-1)\mathbb{P}(Y=-1)$$

car X et Y sont indépendantes donc

$$\mathbb{P}(Z=1)=\frac{1}{2} \text{ et } Z \text{ suit aussi la loi } \mathcal{R}$$

R 10 *Par linéarité de l'espérance,*

$$\mathbb{E}(\tau_n)=\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n m_{i,i}\right)=\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(m_{i,i}).$$

Comme les $m_{i,i}$ ($i\in[[1,n]]$) suivent la loi $\mathcal{R}$, leur espérance est nulle (question 8) donc $\boxed{\mathbb{E}(\tau_n)=0}$.
Comme les $m_{i,i}$ ($i\in[[1,n]]$) sont indépendantes et suivent une loi $\mathcal{R}$,

$$\mathbb{V}(\tau_n)=\sum_{i=1}^n \mathbb{V}(m_{i,i})=n.$$

R 11 *En développant le déterminant par rapport à la première ligne :*

$$\delta_n = \sum_{j=1}^{n} m_{1,j} (-1)^{1+j} \det(M_{1,j})$$

où $M_{1,j}$ est la matrice extraite de la matrice M_n en lui supprimant la ligne 1 et la colonne j.
Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(\delta_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \mathbb{E}(m_{1,j} \times \det(M_{1,j}))$. *Or* $\det(M_{1,j})) = f\left((m_{i,l})_{(i,l)\in[[1,n]]^2, i\neq 1, l\neq j}\right)$ *donc d'après le lemme des coalitions $m_{1,j}$ et $\det(M_{1,j})$ sont indépendantes.*
On en déduit que $\mathbb{E}(\delta_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \mathbb{E}(m_{1,j})\mathbb{E}(\det(M_{1,j})$ *et $m_{1,j} \sim \mathcal{R}$ donc $\mathbb{E}(m_{1,j}) = 0$ donc* $\boxed{\mathbb{E}(\delta_n) = 0}$.

R 12 *Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}_n$: pour toute matrice aléatoire M de taille n dont les coefficients sont indépendants et suivent la loi $\mathcal{R}$, $\mathbb{V}(\det(M)) = n!$.*
Initialisation : pour $n = 1$, soit M une matrice aléatoire de taille dont le coefficient suit $\mathcal{R}$. Alors $\mathbb{V}(\det(M)) = \mathbb{V}(m_{1,1}) = 1$ d'après la question 8. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Hérédité : soit $n \geq 1$ telle que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Soit M une matrice de taille $n+1$ dont les coefficients sont indépendants et suivent la loi $\mathcal{R}$. En développant par rapport à la première ligne :

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n+1} m_{1,j} (-1)^{1+j} \det(M_{1,j})$$

où les matrices $M_{1,j}$ sont définies comme dans la question précédente.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\det(M)^2) &= \mathbb{E}\left(\sum_{1\leq j,k\leq n+1} m_{1,j}m_{1,k} (-1)^{1+j} \det(M_{1,j}) (-1)^{1+k} \det(M_{1,k})\right) \\
&= \sum_{1\leq j,k\leq n+1} (-1)^{2+j+k} \times \mathbb{E}(m_{1,j}m_{1,k} \det(M_{1,j}) \det(M_{1,k}))
\end{aligned}$$

par linéarité de l'espérance. D'après le lemme des coalitions, $m_{1,j}n_{1,k}$ et $\det(M_{1,j})\det(M_{1,k})$ sont indépendantes, et d'après la question 9, si $j \neq k$, $n_{1,j}n_{1,k}$ suit la loi $\mathcal{R}$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\det(M)^2) &= \sum_{1\leq j,k\leq n+1} (-1)^{2+j+k} \times \underbrace{\mathbb{E}(m_{1,j}m_{1,k})}_{=0 \text{ si } j\neq k} \mathbb{E}(\det(M_{1,j}) \det(M_{1,k}))) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{E}(m_{1,j}^2)\mathbb{E}(\det(M_{1,j})^2).
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $j \in [[1,n]]$, $n_{1,j}^2$ vaut 1 avec probabilité 1 et d'après la question précédente,
$\mathbb{V}(\det(M_{1,j})^2) = \mathbb{E}(\det(M_{1,j})^2) - \mathbb{E}(\det(M_{1,j}))^2 = \mathbb{E}(\det(M_{1,j})^2)$ *car* $\mathbb{E}(\det(M_{1,j})) = 0$.
Par hypothèse de récurrence, $\mathbb{V}(\det(M_{1,j})^2) = n!$. Donc

$$\mathbb{E}(\det(M)^2) = \sum_{j=1}^{n+1} n! = (n+1)!$$

Enfin, d'après la question précédente, $\mathbb{V}(\det(M)) = \mathbb{E}(\det(M)^2)$ et la formule de Koenig-Huygens,
Ainsi, la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
D'après le principe de récurrence, on en déduit que $\boxed{\delta_n = n!}$.

R 13 *Soit $A \in \mathcal{N}_n$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_n$. En particulier, A n'est pas inversible. Ainsi, le noyau de A n'est pas réduit au vecteur nul : il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = 0 \cdot X$, donc* $\boxed{\text{0 est valeur propre de } A}$.
De plus, $A^k = 0$ donc X^k est polynôme annulateur de A donc toute valeur propre (complexe) de A est racine de X^k donc est nulle. $\boxed{\text{La seule valeur propre complexe de } A \text{ est donc } 0}$.

R 14 *Soit $A \in \mathcal{N}_n$. D'après la question précédente, A n'est pas inversible, donc* $\boxed{\det(A) = 0}$.
D'autre part le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ donc $tr\,(A) = \sum_{\lambda \in sp_{\mathbb{C}}(A)} m\,(\lambda) \times \lambda = 0$ car 0 est la seule valeur propre complexe de A. $\boxed{\textit{Donc } tr(A) = 0}$.

R 15 *Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. D'après les deux questions précédentes, si M est nilpotente, alors $tr(M) = \det(M) = 0$. Réciproquement, supposons que $tr(M) = \det(M) = 0$. Alors $\chi_M(X) = X^2 - tr(M)X + \det(M) = X^2$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_M(M) = 0_n$. D'où $M^2 = 0_2$ et M est nilpotente.*
Ainsi, $\boxed{M \in \mathcal{N}_2 \iff \det(M) = tr(M) = 0}$.

R 16 *D'après la question précédente, $(M_2 \in \mathcal{N}_2) = (\delta_2 = 0) \cap (\tau_2 = 0)$. Donc d'après la formule des probabilités composées :*

$$\mathbb{P}(M_2 \in \mathcal{N}_2) = \mathbb{P}(\tau_2 = 0)\mathbb{P}_{(\tau_2=0)}(\delta_2 = 0)$$

Or, $\mathbb{P}_{(\tau_2=0)}(\delta_2 = 0) = \mathbb{P}(-m_{1,1}^2 - m_{1,2}m_{2,1} = 0) = \mathbb{P}(m_{1,2}m_{2,1} = -1) = \frac{1}{2}$ d'après la question 9. D'autre part, $\mathbb{P}(\tau_2 = 0) = \mathbb{P}(m_{1,1} = -m_{2,2}) = \mathbb{P}(m_{1,1} = 1, m_{2,2} = -1) + \mathbb{P}(m_{1,1} = -1, m_{2,2} = 1) = \frac{1}{2}$ par indépendance. Ainsi, $\boxed{\mathbb{P}(M_2 \in \mathcal{N}_2) = \frac{1}{4}}$.

R 17 $\mathbb{P}(M_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) = \mathbb{P}(\delta_2 \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(\delta_2 = 0)$. *Or*

$$\mathbb{P}(\delta_2 = 0) = \mathbb{P}(m_{1,1}m_{2,2} = m_{2,1}m_{1,2}).$$

D'après 9, les variables $a = m_{1,1}m_{2,2}$ et $b = m_{2,1}m_{1,2}$ suivent la loi $\mathcal{R}$. Elles sont de plus indépendantes d'après le lemme des coalitions. Donc

$$\mathbb{P}(\delta_2 = 0) = \mathbb{P}(a = 1, b = 1) + \mathbb{P}(a = -1, b = -1) = \mathbb{P}(a = 1)\mathbb{P}(b = 1) + \mathbb{P}(a = -1)\mathbb{P}(b = -1) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $\boxed{\mathbb{P}(M_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}}$

R 18 *On utilise le système complet d'événements $((c_i = -1), (c_i = 1))$.*
On a $\mathbb{P}((c_i = c_i')) = \mathbb{P}((c_i = c_i') \cap (c_i = -1)) + \mathbb{P}((c_i = c_i') \cap (c_i = 1))$
$= \mathbb{P}((c_i = -1) \cap (c_i' = -1)) + \mathbb{P}((c_i = 1) \cap (c_i' = 1))$
donc par indépendance, $\mathbb{P}((c_i = c_i')) = \mathbb{P}((c_i = -1))\,\mathbb{P}((c_i' = -1)) + \mathbb{P}((c_i = 1))\,\mathbb{P}((c_i' = 1)) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

R 19 *Soit $\omega \in \Omega$. Supposons que $(C(\omega), C'(\omega))$ est liée. Comme $C(\omega)$ est non nul, il existe un réel α tel que $C'(\omega) = \alpha C(\omega)$.*
La première composante de $C'(\omega)$ et de $C(\omega)$ appartient à $\{-1, 1\}$ donc $\alpha \in \{-1, 1\}$.
Réciproquement, s'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $C'(\omega) = \varepsilon C(\omega)$ alors $(C(\omega), C'(\omega))$ est bien liée.
Ainsi, $\boxed{\textit{pour tout } \omega \in \Omega,\ (C(\omega), C'(\omega)) \textit{ est liée ssi il existe } \varepsilon \in \{-1, 1\} \textit{ tel que } C'(\omega) = \varepsilon C(\omega)}$.

R 20 *D'après la question précédente,*

$$\mathbb{P}((C, C') \textit{ est liée}) = \mathbb{P}((C = C') \cup (C = -C')) = \mathbb{P}(C = C') + \mathbb{P}(C = -C').$$

On a

$$\mathbb{P}(C = C') = \mathbb{P}(\bigcap_{1 \leq i \leq n} (c_i - c_i' = 0))$$

Or les variables $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_1', c_2', \ldots, c_n'$ sont indépendantes donc d'après le lemme des coalitions appliqué aux n coalitions (c_1, c_1'), (c_2, c_2'), …, (c_n, c_n'), les variables $c_1 - c_1', c_2 - c_2', \ldots, c_n - c_n'$ sont indépendantes, donc

$$\textit{par indépendance, } \mathbb{P}(C = C') = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}((c_i - c_i' = 0) = \frac{1}{2^n} \textit{ d'après la question 18.}$$

De la même façon, on trouve $\mathbb{P}(C = -C') = \frac{1}{2^n}$. Donc $\boxed{\mathbb{P}((C'C') \textit{ est liée}) = \frac{1}{2^{n-1}}}$

R 21 *Soit $\omega \in \Omega$. D'après la question 4,*
- soit $(C_1(\omega), \ldots, C_n(\omega))$ est libre et alors $\omega \in R_n$ et $\omega \notin R_k$ pour $k \in [[1, n-1]]$,
- soit il existe un unique $j \in [[1, n-1]]$ tel que $\omega \in R_j$.
Ainsi, $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{n} R_j$ et l'union est disjointe. $\boxed{\text{Donc } (R_1, \ldots, R_n) \text{ est un système complet d'évènements}}$.

R 22 *Une matrice M est inversible si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes est libre donc $(M_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = ((C_1, \ldots, C_n) \text{ est liée}) = \bigcup\limits_{1 \leq j \leq n} R_j$.*
On en déduit que $\mathbb{P}(M_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}(R_j)$.
Or $R_j \subset C_{j+1} \in vect(C_1, \ldots, C_j)$ donc, par croissance de la probabilité:

$$\mathbb{P}\big(M \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big) \leq \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}\big(C_{j+1} \in vect(C_1, \ldots, C_j)\big).$$

R 23 *Soit $j \in [[1, n-1]]$. La famille $((C_1 = v_1) \cap \cdots \cap (C_j = v_j))_{(v_1, \ldots, v_j) \in \mathcal{V}_{n,1}^j}$ est un système complet d'évènements. D'après la formule des probabilités totales :*

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(C_{j+1} \in vect(C_1, \ldots, C_j)\right) \\ = &\sum_{(v_1, \ldots, v_j) \in \mathcal{V}_{n,1}^j} \mathbb{P}_{((C_1 = v_1) \cap \cdots \cap (C_j = v_j))}\left(C_{j+1} \in vect(C_1, \ldots, C_j)\right) \times \mathbb{P}\left((C_1 = v_1) \cap \cdots \cap (C_j = v_j)\right) \end{aligned}$$

Soit les événements $A = (C_1 = v_1) \cap \cdots \cap (C_j = v_j), B_1 = (C_{j+1} \in vect(C_1, \ldots, C_j))$ et $B_2 = (C_{j+1} \in vect(v_1, \ldots, v_j))$. On a $A \cap B_1 = A \cap B_2$ donc $\mathbb{P}_A(B_1) = \mathbb{P}_A(B_2)$ soit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{((C_1 = v_1) \cap \cdots \cap (C_j = v_j))}\left(C_{j+1} \in vect(C_1, \ldots, C_j)\right) &= \mathbb{P}_{((C_1 = v_1) \cap \cdots \cap (C_j = v_j))}\left(C_{j+1} \in vect(v_1, \ldots, v_j)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(C_{j+1} \in vect(v_1, \ldots, v_j)\right). \end{aligned}$$

car, d'après le lemme des coalitions, la famille $(C_1, \ldots, C_{j+1})$ est une famille de variables aléatoires indépendantes.donc

$$\mathbb{P}\big(C_{j+1} \in vect(C_1, \ldots, C_j)\big) = \sum_{(v_1, \ldots, v_j) \in \mathcal{V}_{n,1}^j} \mathbb{P}\big(C_{j+1} \in vect(v_1, \ldots, v_j)\big) \times \mathbb{P}\big((C_1 = v_1) \cap \cdots \cap (C_j = v_j)\big).$$

R 24 *Le variable aléatoire C_j est à valeur dans $\mathcal{V}_{n,1}$ (car de composante ± 1) donc*
$\mathbb{P}(C_{j+1} \in vect(v_1, \ldots, v_j)) = \sum\limits_{v \in vect(v_1, \ldots, v_j) \cap \mathcal{V}_{n,1}} \mathbb{P}(C_{j+1} = v)$.
D'une part, si $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathcal{V}_{n,1}$, $\mathbb{P}(C_{j+1} = v) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i \in [[1,n]]} (m_{i,j+1} = \alpha_i)\right) = \frac{1}{2^n}$ par indépendance
D'autre part pour $(v_1, \ldots, v_j) \in \mathcal{V}_{n,1}^j$, on a $\dim(vect(v_1, \ldots, v_j)) \leq j$ donc d'après la question 6, $card(vect(v_1, \ldots, v_j) \cap \mathcal{V}_{n,1}) \leq 2^j$, on a donc
$\mathbb{P}(C_{j+1} \in vect(v_1, \ldots, v_j)) \leq 2^j \times \frac{1}{2^n} = 2^{j-n}$
D'après la question 23,

$$\mathbb{P}(C_{j+1} \in vect(C_1, \ldots, C_j)) \leq 2^{j-n} \times \sum_{(v_1, \ldots, v_j) \in \mathcal{V}_{n,1}^j} \mathbb{P}\left((C_1 = v_1) \cap \cdots \cap (C_j = v_j)\right) = 2^{j-n}$$

car $((C_1 = v_1) \cap \cdots \cap (C_j = v_j))_{(v_1, \ldots, v_j) \in \mathcal{V}_{n,1}^j}$ est un système complet d'évènements.
On a donc bien $\boxed{\mathbb{P}(C_{j+1} \in vect(C_1, \ldots, C_j)) \leq 2^{j-n}}$.

R 25 *D'après les questions trois questions précédentes,*

$$\mathbb{P}(M_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) \leq \sum_{j=1}^{n-1} 2^{j-n} = \frac{2}{2^n}\sum_{i=1}^{n-1} 2^{j-1} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{n-2} 2^j = \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1-2^{n-1}}{1-2} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Ainsi, $\boxed{\mathbb{P}(M_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = 1 - \mathbb{P}(\notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) \geq \frac{1}{2^{n-1}}}$.

R 26 *Notons* $E = \{|\langle u_i \mid u_j\rangle|, (i,j) \in I^2, i \neq j\}$. *Comme* I *a au moins deux éléments,* E *est non vide.*
Soit $(i,j) \in I^2$ *avec* $i \neq j$. *Alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :* $|\langle u_i \mid u_j\rangle| \leq \|u_i\|\,\|u_j\| = 1$ *car les vecteurs sont unitaires.*
Ainsi, $\boxed{E \subset [0,1] \text{ : c'est une partie non vide majorée de } \mathbb{R}}$. E *admet donc une borne supérieure. De plus, sa borne supérieure est dans* $[0,1]$.

R 27 *Supposons que* $C(u) = 0$. *Alors pour tout* $(i,j) \in I^2$ *avec* $i \neq j$, $|\langle u_i \mid u_j\rangle| \leq 0$, *donc* $\langle u_i \mid u_j\rangle = 0$ *et* u_i *et* u_j *sont orthogonaux.*
Ainsi, la famille u *est une famille orthogonale formée de vecteurs unitaires donc non nuls, qui est donc libre. Comme* $\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$, u *est une famille finie qui a au maximum* n *éléments. D'où* $\boxed{\mathrm{card}\{u_i, i \in I\} \leq n}$.

R 28 *les fonctions* $t \mapsto \cosh(t)$ *et* $t \mapsto \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$ *sont développables en série entière sur* $\mathbb{R}$ *avec :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cosh(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad et \qquad \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}.$$

Or

$$2^n n! = \prod_{i=0}^{n} (2i) \ \ \text{donc } 0 < 2^n n! \leq (2n)! \text{ donc} \qquad \frac{1}{(2n)!} \leq \frac{1}{2^n n!}.$$

D'où, $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \cosh(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)}$.

R 29 *Les variables aléatoires* X_k *et* Y_k *sont des variables de Bernoulli donc* $X_k(\Omega) = Y_k(\Omega) = \{0,1\}$ *donc toutes les varaible aléatoires intervenant dans cette question sont à valeurs dans un ensemble fini donc sont d'espérance finie et*
Soit $t \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$\exp\left(t\langle X \mid Y\rangle\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{t}{n} X_k Y_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{t}{n} X_k Y_k\right).$$

Or, d'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires $\exp\left(\frac{t}{n}X_1Y_1\right)$ *et* $\prod_{k=2}^{n} \exp\left(\frac{t}{n}X_kY_k\right)$ *sont indépendantes donc :*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(t\langle X \mid Y\rangle\right)\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{t}{n}X_1Y_1\right)\right)\mathbb{E}\left(\prod_{k=2}^{n}\exp\left(\frac{t}{n}X_kY_k\right)\right)$$

et par une récurrence immédiate :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(t\langle X \mid Y\rangle\right)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{t}{n}X_kY_k\right)\right).$$

Puis, si $k \in [[1,n]]$, *la variable* $Z_k = X_kY_k$ *suit la loi* $\mathcal{R}$ *d'après 9, donc, d'après la formule du transfert,*

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{t}{n}X_kY_k\right)\right) = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{t}{n}\right) + \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{t}{n}\right) = \cosh\left(\frac{t}{n}\right).$$

D'où $\boxed{\mathbb{E}\left(\exp\left(t\langle X \mid Y\rangle\right)\right) = \prod_{k=1}^{n} \cosh\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\cosh\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n}$.

R 30 *D'après la question 28, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\cosh\left(\frac{t}{n}\right) \leq \exp\left(\frac{(t/n)^2}{2}\right)$. *Comme les deux côtés de l'inégalité sont positifs, on obtient :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left(\cosh\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \leq \left(\exp\left(\frac{t^2}{2n^2}\right)\right)^n = \exp\left(\frac{t^2}{2n}\right).$$

En appliquant la question précédente :

$$\mathbb{E}\big(\exp(t\langle X \mid Y\rangle)\big) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2n}\right).$$

R 31 *Soit* $t > 0$. *Posons* $T = \exp(t\langle X \mid Y\rangle)$.
On a $\langle X \mid Y\rangle(\omega) \geq \varepsilon \Leftrightarrow t\langle X \mid Y\rangle(\omega) \geq \varepsilon t \Leftrightarrow T(\omega) \geq \exp(\varepsilon t)$.
Or T *est positive et admet un espérance finie, donc d'après l'inégalité de Markov appliquée à* T *:*

$$\mathbb{P}(T \geq \exp(\varepsilon t)) \leq \frac{\mathbb{E}(T)}{\exp(\varepsilon t)} \leq \exp\left(\frac{t^2}{2n} - \varepsilon t\right)$$

On en déduit que $\boxed{\mathbb{P}(\langle X \mid Y\rangle \geq \varepsilon) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2n} - \varepsilon t\right)}$.

R 32 *En prenant* $t = n\varepsilon$, *on obtient* $\dfrac{t^2}{2n} - \varepsilon t = \dfrac{\varepsilon^2 n}{2} - \varepsilon^2 n = -\dfrac{\varepsilon^2 n}{2}$ *donc pose donc*

$$\mathbb{P}(\langle X \mid Y\rangle \geq \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

R 33 *On a* $\mathbb{P}(|\langle X \mid Y\rangle| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(\langle X \mid Y\rangle \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(\langle X \mid Y\rangle \leq -\varepsilon)$.
Or $\langle X \mid Y\rangle(\omega) \leq -\varepsilon \Leftrightarrow \langle -X \mid Y\rangle(\omega) \geq \varepsilon$.
Or $X_i \sim \mathcal{R}$ *donc* $-X_i \sim \mathcal{R}$ *et la famille* $-X_1, \ldots, -X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ *est une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi* $\mathcal{R}$.
En appliquant la question précédente à $-X$ *et* Y *on obtient que*
$\mathbb{P}(\langle X \mid Y\rangle \leq -\varepsilon) = \mathbb{P}(\langle -X \mid Y\rangle \geq \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right)$. *On en déduit*

$$\mathbb{P}(|\langle X \mid Y\rangle| \geq \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

R 34 *Par sous-additivité :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geq \varepsilon\right) \leq \sum_{1\leq i<j\leq N} \mathbb{P}\left(|\langle X^i \mid X^j\rangle| \geq \varepsilon\right).$$

D'après la question précédente, pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$ *avec* $i \neq j$, *comme* $X_1^i, \ldots, X_n^i, Y_1^j, \ldots, Y_n^j$ *sont indépendantes et de même loi* $\mathcal{R}$, *on a*

$$\mathbb{P}(|\langle X^i \mid X^j\rangle| \geq \varepsilon) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geq \varepsilon\right) \leq \sum_{1\leq i<j\leq N} 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right) &= 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right)\sum_{j=2}^{N}\sum_{i=1}^{j-1} 1 \\
&= 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right)\sum_{j=1}^{N-1} j \\
&= 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right)\frac{N(N-1)}{2}
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geq \varepsilon\right) \leq N(N-1)\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right).$$

R 35 *Comme* $n \geq 4\frac{\ln N}{\varepsilon^2}$, $\frac{\varepsilon^2 n}{2} \geq 2\ln(N)$ *et* $-\frac{\varepsilon^2 n}{2} \leq -2\ln(N)$. *Par croissance de l'exponentielle :*

$$N(N-1)\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 n}{2}\right) \leq N(N-1)\exp(-2\ln(N)) = \frac{N(N-1)}{N^2} < 1.$$

D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geq \varepsilon\right) < 1.$$

R 36 *On remarque que* $\overline{\left(\bigcup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geq \varepsilon\right)} = \bigcap_{1\leq i<j\leq N} (|\langle X^i \mid X^j\rangle| < \varepsilon)$ *donc*
$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| < \varepsilon\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| < \varepsilon\right)$.
On a supposé $N \leq \exp\left(\frac{\varepsilon^2 n}{4}\right)$ *donc* $n \geq \frac{4\ln(N)}{\varepsilon^2}$ *et d'après la question précédente,* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| \geq \varepsilon\right) < 1$ *donc*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| < \varepsilon\right) > 0.$$

Ainsi, $\bigcap_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| < \varepsilon$ *est non vide : il existe au moins un* $\omega \in \bigcap_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i \mid X^j\rangle| < \varepsilon$.
Posons $u_i = X^i(\omega)$ *pour tout* $1 \leq i \leq N$. *Alors par définition,* $\boxed{C(u) < \varepsilon}$.