PSI DS6, sujet standard le 12 février 2025 durée 3h

Le sujet comporte 4 pages

Les calculatrices sont interdites

- Les solutions devront être présentées **dans l'ordre de l'énoncé** (quitte à laisser des blancs pour compléter plus tard), rédigées avec une **encre foncée**.
- Ce qui est écrit sur une page ne devra pas dépasser sur la page située à côté.
- Chaque fois que le résultat d'une question précédente sera utilisé (ce qui est possible même si la question n'a pas été traitée), **le numéro de cette question** devra être mentionné clairement
- Les théorèmes utilisés devront être mentionnés explicitement et leurs hypothèses seront mentionnées, et, si nécessaire, vérifiées avec soin. Les solutions doivent être rédigées de manière claire, compréhensible et rigoureuse ; il en sera tenu le plus grand compte dans la notation finale.
- **Les résultats seront encadrés**

Exercice 1: convergence d'une suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit, sur l'intervalle $[0, +\infty[$, la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{nx}{1+n^2x^4}$.

Q 1 *Etudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.*

Q 2 *En étudiant les variations de f_n, étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.*

Q 3 *Soit $a > 0$. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur l'intervalle $[a, +\infty[$.*

Q 4 *Calculer $\int_0^1 f_n(t)\,dt$. A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right) = \int_0^1 \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt$?*

Exercice 2: Deux interversions série-intégrale

Première partie

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, \pi]$, $u_n(x) = \dfrac{x \sin(nx)}{1+n^2}$.

Q 5 *Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, \pi]$.*

Dans la suite, on pose, pour $x \in [0, \pi]$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$

Q 6 *Montrer que que la fonction f est continue sur $[0, \pi]$.*

Q 7 *Montrer que $\int_0^\pi f(x)\,dx = \pi \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n(1+n^2)}$.*

Deuxième partie

Le but de cette partie est de montrer que $\int_0^{+\infty} \cos\left(\sqrt{t}\right) e^{-t} dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{n!}{(2n)!}$.

Q 8 *Montrer que* $\forall t \geq 0$, *on a* $\cos\left(\sqrt{t}\right) e^{-t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n t^n}{(2n)!} e^{-t}$.

Q 9 *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la fonction* $g_n : t \mapsto t^n e^{-t}$ *est intégrable sur* $[0, +\infty[$.

Q 10 *On pose* $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$. *Déterminer la valeur de* I_n.

Q 11 *Conclure.*

Exercice 3:

Soit α un réel quelconque. On considère la fonction $g_\alpha : \begin{cases} [1, +\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha \sqrt{t^2 - 1}} \end{cases}$

On rappellle que la fonction cosinus hyperbolique est $ch : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$ et la fonction sinus hyperbolique est $sh : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$

Q 12 *Montrer que pour tout réel* α, *la fonction* g_α *est intégrable sur* $]1, 2]$.

Q 13 *Pour quelles valeurs du réel* α *la fonction* g_α *est-elle intégrable sur* $[2, +\infty[$.

Dans la suite du problème, on pose, si $\alpha > 0$, $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^\alpha \sqrt{t^2 - 1}} dt$.

Q 14 *Justifier que l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ *est convergente et montrer, à l'aide d'un changement de variable que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{4}$.

Q 15 *A l'aide du changement de variable défini par* $u(x) = ch(x)$, *montrer que* $2 \times \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = I(1) = \frac{\pi}{2}$.

Q 16 *Justifier que la fontion* $g : x \mapsto \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et préciser la valeur de* $g'(x)$. *En déduire la valeur de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{ch^2(x)} dx$.

Q 17 *En déduire que* $I(2) = 1$.

Q 18 *Etudier le sens de variation de la fonction* I.

Q 19 *Montrer que la suite* $(I(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ *converge et déterminer sa limite (on détaillera les hypothèses du théorème utilisé).*

Q 20 *Soit $x \in]0, +\infty[$. Démontrer la relation*

$$I(x+2) = \frac{x}{x+1} I(x)$$

Q 21 *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression de $I(2p)$ à l'aide de factorielles.*

Pour tout réel $x > 0$, on pose

$$\phi(x) = xI(x)I(x+1)$$

Q 22 *Prouver que $\phi(x+1) = \phi(x)$. Calculer $\phi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

Q 23 *Déduire des questions précédentes que*

$$I(n) \sim_{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Q 24 *En utilisant la question 18, montrer que*

$$I(x) \sim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

Q 25 *Prouver que la fonction ϕ est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$.*

Exercice 4: Etude d'une suite de variables aléatoires

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.
Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes définies un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui sont indépendantes et ont toutes la même espérance m et la même variance σ^2.
On définit alors la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geq 0}$ par:

$$Y_0 = \frac{X_0}{2} \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ Y_{n+1} = \frac{X_{n+1} + Y_n}{2}$$

Q 26 *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n+1-k}} X_k$.*

Q 27 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que Y_n est d'espérance fine et calculer $E(Y_n)$.*
Déterminer la limite de $E(Y_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Q 28 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de la variance $V(Y_n)$ et la calculer.*
Déterminer la limite de $V(Y_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Q 29 *Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{k=0}^{i} \frac{1}{2^{2i-2k+2}} \leq \frac{1}{3}$.*
En déduire que pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i < j$, la covariance $cov(Y_i, Y_j)$ de Y_i et Y_j vérifie:

$$cov(Y_i, Y_j) \leq \frac{\sigma^2}{3} \frac{1}{2^{j-i}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose: $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

Q 30 *Déterminer la limite* ℓ *de la suite* $(E(S_n))_{n\geq 1}$.

Q 31 *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} V(S_n) = 0$.

Q 32 *Soit* $\varepsilon > 0$.

1. *Justifier qu'il existe un entier* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que :* $\forall n \geq n_0$, *l'événement* $(|S_n - \ell| \geq \varepsilon)$ *est contenu dans l'événement* $\left(|S_n - E(S_n)| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$
2. *En déduire la limite de* $P(|S_n - \ell| \geq \varepsilon)$ *quand* n *tend vers* $+\infty$.

Correction du DS6:

Exercice 1: convergence d'une suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit, sur l'intervalle $[0,1]$, la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{nx}{1+n^2x^4}$.

R 1 *Soit* $x \in \mathbb{R}_+$.
Si $x > 0$, *on a* $f_n(x) \sim_{n\to\infty} \dfrac{nx}{n^4x^2} = \dfrac{1}{n^3x}$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
De plus $f_n(0) = 0 \to_{n\to+\infty} 0$ *donc la suite de fonctions* (f_n) *converge simplement vers la fonction nulle sur* $\mathbb{R}_+$.

R 2 *On a* $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^4}$ *dérivable sur* $\mathbb{R}_+$. *On a* $f_n'(x) = \dfrac{n(1+n^2x^4) - nx \times 4n^2x^3}{(1+n^2x^4)^2} = \dfrac{n(1-3n^2x^4)}{(1+n^2x^4)^2}$. *Or* $1 - 3n^2x^4 > 0 \Leftrightarrow x^4 < \dfrac{1}{3n^2} \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{3^{\frac14}\sqrt{n}}$.

On en déduit les variations de $f_n - f$ *et le fait que* $\|f_n - f\|_\infty = f_n\left(\dfrac{1}{3^{\frac14}\sqrt{n}}\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{n}}{3^{\frac14}}}{1+\frac13} \sim_{n\to\infty} \dfrac{3\sqrt{n}}{4\times 3^{\frac14}}$ *qui ne tend pas vers* 0 *lorsque* n *tend vers l'infini.*
On en déduit que la suite de fonctions (f_n) *ne converge pas uniformément sur* $[0,+\infty[$.

R 3 *Soit* $a > 0$ *et* $x \in [a,+\infty[$. *On a* $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^4} \le \dfrac{nx}{n^2x^4} = \dfrac{1}{nx^3}$.
Or $x \ge a > 0$ *donc* $\dfrac{1}{nx^3} \le \dfrac{1}{na^3}$. *On a donc* $|f_n(x) - f(x)| \le \dfrac{1}{na^3}$ *donc* $f_n - f$ *est bornée sur* $[a,+\infty[$ *et* $\|f_n - f\|_\infty^{[a,+\infty[} \le \dfrac{1}{na^3} \to_{n\to+\infty} 0$.
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty^{[a,+\infty[} = 0$ *donc la suite de fonctions* (f_n) *converge uniformément sur l'intervalle* $[a,+\infty[$

R 4 *On a* $\int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 \dfrac{nt}{1+n^2t^4}dt$ *et en posant* $u = nt^2$, *on obtient .*
$\int_0^1 f_n(t)\,dt = \dfrac12 \int_0^n \dfrac{1}{1+u^2}du = \frac12[\arctan(u)]_0^n = \frac12 \arctan(n) \to_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{4} \neq 0 = .\int_0^1 f(t)\,dt$
(on en déduit que la suite de fonctions (f_n) *ne converge pas uniformément sur* $[0,1]$, *ce que donnait déjà l'étude des variations).*

Exercice 2: Deux interversions série-intégrale

R 5 *Pour* $n \ge 1$ *et* $x \in [0,\pi]$, $0 \le |u_n(x)| \le \dfrac{1}{1+n^2} \le \dfrac{1}{n^2}$ *et* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *converge donc* $\sum |u_n(x)|$ *converge donc* $\sum u_n(x)$ *converge.*
La série de fonctions $\sum u_n$ *converge donc simplement sur* $[0,\pi]$.

R 6 $|u_n(x)| \le \dfrac{1}{n^2}$ *donc* $0 \le \|u_n\|_\infty \le \dfrac{1}{n^2}$ *et* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *converge donc* $\sum \|u_n\|_\infty$ *converge donc la série de fonctions* $\sum u_n$ *converge normalement sur* $[0,\pi]$
(H1): Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n *est continue sur* $[0,\pi]$
(H2): la série de fonctions $\sum u_n$ *converge normalement donc uniformément sur* $[0,\pi]$
donc f *est continue sur* $[0,\pi]$.

R 7 *Les mêmes hypothèses (H1) et (H2) permettent d'intervertir série et intégrale sur le segment* $[0,\pi]$*:* $\int_0^\pi f(x)\,dx = \int_0^\pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^\pi u_n(x)\,dx\right)$. *Or* $\int_0^\pi u_n(x)\,dx = \dfrac{1}{1+n^2}\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx$ *et* $\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx = \left[\dfrac{-x\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{n}\cos nx\,dx = -\dfrac{\pi\cos(n\pi)}{n} + \left[\dfrac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^\pi = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{n}$. *On a donc* $\int_0^\pi f(x)\,dx = \pi\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n(1+n^2)}$.

R 8 *On a, pour tout* x *réel,* $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ *donc si* $t\geq 0$*, alors* $\cos\left(\sqrt{t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n \sqrt{t}^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n t^n}{(2n)!}$ *donc* $\forall t\geq 0,\ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n t^n}{(2n)!}e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ *avec* $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n t^n}{(2n)!}e^{-t}$.

R 9 *La fonction* $g_n : t\mapsto t^n e^{-t}$ *est continue (th opérations) sur* $[0,+\infty[$ *et* $\dfrac{t^n e^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^{n+2}e^{-t} \to_{t\to+\infty} 0 : (CC)$ *donc* $t^n e^{-t} = o_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ *donc* g_n *est intégrable sur* $[1,+\infty[$ *donc sur* $[0,+\infty[$.

R 10 *On a* $I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-t}dt = \left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^{+\infty} + (n+1)\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$. *On a* $\lim_{t\to+\infty} t^{n+1}e^{-t} = 0 : (CC)$ *donc* $I_{n+1} = (n+1)\,I_n$. *De plus,* $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$.
On en déduit $I_n = nI_{n-1} = n(n-1)\,I_{n-2} = n(n-1)\times\cdots\times 2\times 1\times I_0 = n!$.

R 11 *Appliquons le th d'interversion* $\sum - \int$ *sur un intervalle quelconque:*
- *Pour tout* n*,* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}g_n$ *est continue (donc CPM) est intégrable sur* $[0,+\infty[$ *d'après Q2.*
- *La série de fonctions* $\sum u$ *converge simplement sur* $[0,+\infty[$ *et a pour somme* f.
- *La série numérique* $\sum\left(\int_{[0,+\infty[}|u_n|\right)$ *converge: On a* $\int_{[0,+\infty[}|u_n| = \int_{[0,+\infty[}\dfrac{1}{(2n)!}|g_n| = \dfrac{n!}{(2n)!} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} \leq \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \sim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}$ *donc la SATP* $\sum\int_{[0,+\infty[}|u_n|$ *converge.*

On en déduit que f *est intégrable sur* $[0,+\infty[$ *et* $\int_0^{+\infty}\cos\left(\sqrt{t}\right)e^{-t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}u_n(t)\,dt\right)$.
Or $u_n = (-1)^n|u_n|$ *donc* $\int_0^{+\infty}u_n(t)\,dt = (-1)^n\dfrac{n!}{(2n)!}$ *donc* $\int_0^{+\infty}\cos\left(\sqrt{t}\right)e^{-t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{n!}{(2n)!}$.

Exercice 3:

R 12 *Soit* $x\in\mathbb{R}$*.fixé. La fonction* $h\ :\ t\mapsto\dfrac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}$ *est continue sur* $]1,+\infty[$.
Sur $]1,2]$*: On a* $\dfrac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}} = \dfrac{1}{t^x\sqrt{t+1}}\dfrac{1}{\sqrt{t-1}}$ *donc* $h(t)\sim_{t\to1^+}\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t-1}}$ *donc est intégrable.*

R 13 *Sur* $[2,+\infty[$*: On a* $h(t)\sim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^{x+1}}$ *et* $t\mapsto\frac{1}{t^{x+1}}$ *est intégrable ssi* $x>0$ *donc* h *est intégrable ssi* $x>0$.
la fonction h *étant positive, l'existence de l'intégrale équivaut à l'intégrabilité et donc* f *est définie sur* $]0,+\infty[$.

R 14 *La fonction* $x\mapsto\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ *est continue sur* $[0,+\infty[$ *(*$e^x+e^{-x}>0$*) et* $e^{-x}\sim_{x\to+\infty}e^x$ *donc* $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}\sim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$. *Or* $x\mapsto e^{-x}$ *est intégrable sur* $[0,+\infty[$ *donc* $x\mapsto\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ *est intégrable sur* $[0,+\infty[$.
Posons $u(x) = e^x$*.La fonction* u *est continue et strictement croissante sur* $]0,+\infty[$ *donc induit une bijection de*

$]0,+\infty[$ *sur* $]0,+\infty[$. *Elle est de classe* C^1 *donc* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(e^x)^2+1}\times e^x dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^2+1}du=$ $[\arctan(u)]_1^{+\infty}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$.

R 15 *La fonction* $t:x\mapsto ch(x)$ *est de classe* C^1 *et strictement croissante sur* $]0,+\infty[$ *donc induit une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $\left]ch(0),\lim\limits_{u\to+\infty}ch(u)\right[=]1,+\infty[$.

Pour $x>0$, $sh(x)>0$ *et* $ch^2(x)-sh^2(x)=1$ *donc* $sh^2(x)=\sqrt{ch^2(x)-1}$ *donc* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2ch(x)}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2ch(x)\sqrt{ch^2(x)-1}}sh(x)\,dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2t\sqrt{t^2-1}}dt=\frac{1}{2}f(1)$ *(et comme la deuxième intégrale est convergent, la première l'est aussi). on a donc* $\displaystyle f(1)=\int_0^{+\infty}\frac{2}{e^u+e^{-u}}du=\frac{\pi}{2}$.

R 16 *La fontion* g *est dérivable (th opérations) et on a* $g'(x)=\dfrac{ch^2(x)-sh^2(x)}{ch^2(x)}=\dfrac{1}{ch^2(x)}$.

On a donc $\displaystyle\int_0^A\frac{1}{ch^2(x)}dx=[g(x)]_0^A\to_{A\to+\infty}1$.*car* $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\sim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$ *donc l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{ch^2(x)}dx$ *converge et vaut* 1..

R 17 *Le changement de variable* $x\mapsto ch(x)$ *donne* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{ch^2(x)}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{ch^2(x)\sqrt{ch^2(x)-1}}sh(x)\,dx=$ $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^2\sqrt{t^2-1}}dt=f(2)$ *donc* $\displaystyle f(2)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{ch^2(x)}dx=1$ *d'après la question précédente.*

R 18 $I(x)$ *est l'intégrale d'une fonction positive entre deux bornes "dans le bon sens" donc* $\forall x>0,\ I(x)\geq 0$. *Comme la fonction intégrée est continue, positive et non nulle, on peut même dire que* $\forall x>0,\ f(x)>0$. *Montrer que* I *est décroissante sur* $]0,+\infty[$.
Si $0<x\leq y$ *alors pour tout* $t>1$ *on a* $t^x\leq t^y$ *donc* $\dfrac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}\geq\dfrac{1}{t^y\sqrt{t^2-1}}$. *On en déduit en intégrant que* $I(x)\geq I(y)$. *Ceci montre que* I *est croissante sur* $]0,+\infty[$.

R 19 *on pose,* $f_n(t)=\dfrac{1}{t^n\sqrt{t^2-1}}$. *On a donc* $I(n)=\int_0^{+\infty}f_n(t)\,dt$. *Appliquons le théorème de convergence dominée:*
- *Les fonctions* f_n *sont continues par morceaux sur* $]1,+\infty[$.
- *Soit* $t>1$ *fixé.* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{t^n\sqrt{t^2-1}}=0$ *donc la suite de fonctions* (f_n) *converge simplement vers la fonction nulle* f *sur* $]1,+\infty[$ *qui est continue par morceaux.*
- *Si* $n\geq 1$, $|f_n(t)|=\left|\dfrac{1}{t^n\sqrt{t^2-1}}\right|\leq\left|\dfrac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\right|=\varphi(t)$ *qui est intégrable sur* $]1,+\infty[$*(déjà vu)*

On en déduit que la suite $(I(n))$ *converge vers* $\int_0^{+\infty}f(t)\,dt=0$.

R 20 *Soit* $x>0$. *On a* $\displaystyle I(x)=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{x+1}}\times\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$. *On intègre par parties:*
$t\mapsto\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$ *est continue sur* $]1,+\infty[$ *et* $t\mapsto\sqrt{t^2-1}$ *en est une primitive.*
$t\mapsto\frac{1}{t^{x+1}}$ *est de classe* C^1 *sur* $]1,+\infty[$ *de dérivée* $t\mapsto-\frac{(x+1)}{t^{x+2}}$.
Sous réserve de limites finies, on a $\displaystyle I(x)=\left[\frac{\sqrt{t^2-1}}{t^{x+1}}\right]_1^{+\infty}+(x+1)\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{t^2-1}}{t^{x+2}}dt=(x+1)\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{t^2-1}}{t^{x+2}}dt$ *car* $t\mapsto\frac{\sqrt{t^2-1}}{t^{x+1}}$ *est de limite nulle en* 1 *et en* $+\infty$.

En écrivant que $\dfrac{\sqrt{t^2-1}}{t^{x+2}} = \dfrac{1}{t^{x+2}}\dfrac{t^2-1}{\sqrt{t^2-1}} = \dfrac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}} - \dfrac{1}{t^{x+2}\sqrt{t^2-1}}$ *et comme toutes les intégrales existent, on a alors en intégrant,* $I(x) = (x+1)(I(x) - I(x+2))$ *dont on en déduit que*

$$I(x+2) = \frac{x}{x+1} I(x)$$

R 21 *On a* $I(2p) = \dfrac{(2p-2)}{(2p-1)} I(2p-2) = \dfrac{(2p-2)}{(2p-1)} \times \dfrac{(2p-4)}{(2p-3)} \times \ldots \times \dfrac{2}{3} \times I(2)$
$= \dfrac{((2p-2)\times(2p-4)\times\cdots\times 2)^2}{(2p-1)!} = \dfrac{4^{p-1}((p-1)!)^2}{(2p-1)!}$.

R 22 *On a* $\dfrac{\phi(x)}{\phi(x+1)} = \dfrac{xI(x)I(x+1)}{(x+1)I(x+1)I(x+2)} = \dfrac{xI(x)}{(x+1)I(x+2)} = 1$ *donc* $\phi(x+1) = \phi(x)$. *On en déduit que* $\phi(n) = \phi(1) = \dfrac{\pi}{2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

R 23 *On a* $\phi(n) = nI(n)I(n+1) = \dfrac{\pi}{2}$ *donc* $I(n)I(n+1) = \dfrac{\pi}{2n}$. *D'après la décroissance et positivité de* I, *on a* $(I(n+1))^2 \leq I(n)I(n+1) \leq (I(n))^2$. *On en déduit que* $\forall n \geq 2,\ (I(n))^2 \geq \dfrac{\pi}{2n}$ *et* $(I(n))^2 \leq \dfrac{\pi}{2(n-1)}$ *donc* $\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \leq I(n) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2(n-1)}}$. *On en déduit que*

$$I(n) \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

R 24 *Toujours par décroissance de* I, *on a* $\forall x \geq 1,\ I(\lfloor x\rfloor + 1) \leq I(x) \leq I(\lfloor x\rfloor)$.
D'une part, $\dfrac{I(\lfloor x\rfloor)}{\sqrt{\frac{\pi}{2x}}} = \dfrac{I(\lfloor x\rfloor)}{\sqrt{\frac{\pi}{2\lfloor x\rfloor}}} \times \dfrac{\sqrt{\frac{\pi}{2\lfloor x\rfloor}}}{\sqrt{\frac{\pi}{2x}}} \to_{x\to+\infty} 1$ *car* $x = \lfloor x\rfloor + o_{x\to+\infty}(x)$ *donc* $x \sim_{x\to+\infty} \lfloor x\rfloor$ *et*
d'autre part, $\dfrac{I(\lfloor x\rfloor+1)}{\sqrt{\frac{\pi}{2x}}} \to_{x\to+\infty} 1$ *(idem) donc, par encadrement,* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{I(x)}{\sqrt{\frac{\pi}{2x}}} = 1$ *donc*

$$I(x) \sim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

R 25 *Avec ce qui précède,* ϕ *tend vers* $\pi/2$ *quand* $x \to +\infty$. *Or, pour tout* x *on a*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \phi(x) = \phi(x+n)$$

En faisant tendre n *vers* $+\infty$, *on en déduit que*

$$\forall x > 0,\ \phi(x) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 4: Etude d'une suite de variables aléatoires

R 26 *Montrons cette formule* $\boxed{\text{par récurrence sur } n \geq 0}$ *:*
- La propriété est vraie pour $n = 0$ *— puisque* $Y_0 = \frac{X_0}{2}$.
- Supposons la formule vraie au rang n, *alors il vient :*

$$Y_{n+1} = \frac{X_{n+1} + Y_n}{2} = \frac{X_{n+1}}{2^{(n+1)+1-(n+1)}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n+2-k}} X_k = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^{(n+1)+1-k}} X_k.$$

Donc la formule est vraie au rang $n+1$.

R 27 *D'après **Q26**, par* $\boxed{\text{linéarité de l'espérance,}}$ *on a :*

$$E(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n+1-k}} E(X_k) \underset{j=n-k}{=} \frac{m}{2} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^j} = m\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \to_{n\to+\infty} m \ \text{car} \ \left|\frac{1}{2}\right| < 1.$$

R 28 *D'après **Q26**, par* $\boxed{\text{indépendance des } X_k,}$ *on a :*

$$V(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^{n+1-k}}\right)^2 V(X_k) \underset{j=n-k}{=} \frac{\sigma^2}{4} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{4^j} = \frac{\sigma^2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right) \to_{n\to+\infty} \frac{\sigma^2}{3} \ \text{car} \ \left|\frac{1}{4}\right| < 1$$

R 29 *En effet, par* $\boxed{\text{changement d'indice,}}$ *on a :*

$$\sum_{k=0}^{i} \frac{1}{2^{2i-2k+2}} \underset{\ell=i-k}{=} \frac{1}{4} \sum_{\ell=0}^{i} \frac{1}{4^\ell} \leq \frac{1}{4} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{4^\ell} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
cov(Y_i, Y_j) &= cov\left(\sum_{k=0}^{i} \frac{1}{2^{i+1-k}} X_k, \sum_{l=0}^{j} \frac{1}{2^{j+1-l}} X_l\right) \ \text{d'après } \textbf{Q26} \\
&= \sum_{k=0}^{i} \sum_{l=0}^{j} \frac{cov(X_k, X_l)}{2^{i+j+2-(k+l)}} \ \text{(bilinéarité de la covariance)} \\
&= \sum_{k=0}^{i} \frac{V(X_k)}{2^{i+j+2-2k}} \quad \text{car } cov(X_k, X_l) = 0 \text{ si } k \neq l \text{ (indépendance)} \\
&= \frac{\sigma^2}{2^{j-i}} \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{2^{2i-2k+2}} \\
&\leq \frac{\sigma^2}{3} \frac{1}{2^{j-i}} \ \text{d'après ce qui précède.}
\end{aligned}$$

R 30 *D'après **Q27**, par* $\boxed{\text{linéarité de l'espérance,}}$ *on trouve :*

$$E(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} m\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) = m - \frac{m}{2n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \to_{n\to+\infty} m$$

R 31

$$\begin{aligned}
V(S_n) &= \frac{1}{n^2} V(Y_1 + \cdots + Y_n) \ \text{(formule } V(aX+b) = a^2 V(X)\text{)} \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n} V(Y_k) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} cov(Y_i, Y_j)\right] \ \text{(variance d'une somme} \\
&\leq \frac{1}{n^2}\left[n\frac{\sigma^2}{3} + \frac{2\sigma^2}{3} \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{2^{j-i}}\right)\right] \ \text{d'après Q3 et Q4}
\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{2^{j-i}}\right) \underset{k=j-i}{=} \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n-i} \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} 1 = n - 1 \leq n.$$

Ainsi, on a $\boxed{0 \leq V((S_n) \leq \frac{\sigma^2}{n} \to_{n\to+\infty} 0,}$ *d'où le résultat voulu, par encadrement.*

R 32 *Soit* $\varepsilon > 0$.

1. *On* $|S_n - E(S_n)| + |E(S_n) - l| \geq |S_n - \ell| -$.
   Or $\lim\limits_{n \to +\infty} E(S_n) = l$ *donc il existe un rang* n_0 *à partir duquel* $|l - E(S_n)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   Si $|S_n - \ell| \geq \varepsilon$.*alors* $|S_n - \ell| - |l - E(S_n)| \geq \varepsilon - \dfrac{\varepsilon}{2}$ *donc* $|S_n - E(S_n)| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   L'événement $(|S_n - \ell| \geq \varepsilon)$ *est donc contenu dans l'événement* $\left(|S_n - E(S_n)| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$.

2. *On en déduit que grace à l'inégalité de Bienaymée Cebychev que*
   Si $n \geq n_0$, $P((|S_n - \ell| \geq \varepsilon)) \leq P\left(|S_n - E(S_n)| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \leq \dfrac{V(S_n)}{\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2} \to_{n \to +\infty} 0$ *d'après la question précédente.*