# Semaines 17 et 18

## Contenu:

- Espaces vectoriels normés: Normes, normes 1, 2 et $\infty$ dans $\mathbb{K}^p$ et $C([a,b],\mathbb{R})$, normes équivalentes, parties bornées, parties convexes. Les normes d'un ev de dim finie sont équivalentes (admis). Convergence des suites d'un espace vectoriel normé, parties fermées (uniquement la définition séquentielle). Applications continues. applications lipschitziennes, théorème de passage aux coordonnées pour la convergence des suites et les limites de fonctions. Extension des théorèmes de première année sur les limites. Continuité des applications linéaires et multilinéaires. Théorème des bornes atteintes
- Séries de fonctions. Théorèmes d'interversions..
- **Révisions:** séries numériques, séries entières, intégration, équations différentielles.

## Avertissement pour les colleurs:

- nouveauté du programme: la convergence et la continuité peuvent être étudiées en dimension infinie.
- Pour l'instant: définition des fermés uniquement par les suites. Ouverts et boules ouvertes pas encore définis. L'étude des fermés par la propriété $\{x|\ f(x)=0\}$ pas encore vue.
- aucun exemple de convergence uniforme sans passer par la CV normale n'a été vu pour l'instant.

## Questions de cours:

1. Donner la définition d'une partie fermée et d'un point adhérent à une partie.
2. La norme est une application 1 lipschitzienne.
3. Soit $E$ un espace vectoriel normé et $B=\{x\in E, \|x\|\leq 1.\}$. Montrer que $B$ est une partie fermée et convexe de $E$.
4. Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$ ($E$ et $F$ espaces vectoriels normés de dimension finie). En choisissant une norme particulière dans $F$, montrer que $f$ est bornée sur la boule unite. Montrer qu'il existe $M>0$ tel que pour tout $x\in E$, $\|f(x)\|\leq M\|x\|$. Montrer que $f$ est lipschitzienne.
5. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que la limite de cette suite est une matrice de projecteur.
6. On suppose que $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable. A quelle condition la suite $(A^p)$ converge-t-elle?
7. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée non convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
8. L'ensemble des matrices non inversibles est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
9. L'ensemble des matrices inversibles n'est pas une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
10. $(*)$ L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
11. Définition de la convergence uniforme d'une série de fonctions. Caractérisation avec le reste.
12. Définition de la convergence normale d'une série de fonctions. Majoration uniforme de $|R_n(x)|$ s'il y a convergence normale. Convergence normale entraîne convergence uniforme.
13. Enoncé des théorèmes de continuité et de dérivation terme à terme de la somme d'une série de fonctions.
14. Enoncer le théorème d'interversion série-intégrale sur un segment. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[0,1]$, $u_n(x)=\dfrac{x^n}{(n+1)^2}$ et $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$.

    Etudier l'existence de $f(x)$. Montrer que $f$ est continue sur $[0,1]$. Montrer que $\int_0^1 f(x)\,dx=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^3}$
15. Enoncer le théorème d'interversion série-intégrale sur un intervalle quelconque. Montrer que la fonction $S$ définie par $S(t)=\dfrac{t}{e^t-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.Montrer que $\int_0^{+\infty}S(t)\,dt=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.
16. Montrer que $x\mapsto\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n^3+1}$ est définie, continue, de classe $C^1$ sur $[-1,1]$.

17. convergence simple de $\sum \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$, sens de variation de la somme $S$ (sans passer par la dérivation). $1 \leq S(x) \leq \frac{1}{1-e^{-x}}$ pour $x > 1$, limite de $S$ en $+\infty$ (exo).

18. convergence simple de $\sum \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$, la somme $S$ est $C^2$ sur $]0,+\infty[$ et vérifie une équa diff du second ordre dont le second membre s'exprime sans somme de série.

19. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,\pi]$, $u_n(x) = \cos^n(x)\sin(x)$. Etudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$ et calculer $S(x)$. La fonction $S$ est elle continue? Que peut-on en déduire? (exo)

20. On pose, pour $x \geq 0$, $u_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Montrer que $S$ est définie sur $[0,+\infty[$ et continue sur $]0,+\infty[$. Etudier la convergence normale de $\sum u_n$.sur $]0,+\infty[$ .

21. On pose, pour $x \geq 0$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^n}$ Montrer que $S$ est définie et de classe $C^\infty$ sur $[0,+\infty[$.

22. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^2x}$ admet une limite réelle en $+\infty$.