

Exercice 1: Recherche de solutions d'équation différentielle sous forme de série trigonométrique

Cet exercice est analogue aux exercices vus en début d'année sur la recherche de solutions d'équations différentielles développables en série entières

$$\text{On pose, pour } x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

Q 1 Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On veut montrer qu'il existe une solution 2π périodique à l'équation différentielle: $(E) : y'' - y = f$ sur $\mathbb{R}$.

Q 2 Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels telle que la fonction $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$ soit définie sur $\mathbb{R}$ et qu'on puisse dériver g deux fois terme à terme.

Donner une valeur aux réels b_n de manière que g soit une solution de (E) ?

Q 3 On reprend la valeur des b_n et on pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = b_n \sin(nx)$.

1. Montrer que les séries fonctions $\sum u_n$, $\sum u'_n$ et $\sum u''_n$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que l'équation (E) admet une solution 2π périodique.

Remarque C'est ce genre de calcul qui ont permis à Joseph Fourier de donner des solutions à l'équation de la chaleur (au dérivées partielles) en 1822 (bien avant que la théorie des séries de fonctions soit correctement établie)

Exercice 2:

Q 4 Montrer que l'application $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ M \mapsto \text{tr} \left(M - (M^T)^2 \right) \end{array} \right.$ est continue (on détaillera les continuité de toutes les fonctions "intermédiaires")

Q 5 Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 6 Montrer qu'il existe $(A, B) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$ vérifiant:

$$\forall M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \text{tr} \left(A - (A^T)^2 \right) \leq \text{tr} \left(M - (M^T)^2 \right) \leq \text{tr} \left(B - (B^T)^2 \right)$$

Remarque Ce genre de question figure souvent en début de partie de problème: on commence, dans un premier temps, par mettre en évidence l'existence d'un minimum et d'un maximum et dans un deuxième temps, on cherche à déterminer une valeur exacte ou approchée de ce minimum et de ce maximum (ce qui est souvent beaucoup plus long).

Problème 1: La fonction $\ln(\Gamma)$

Présentation générale

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- (i) la fonction f est de classe C^1 ,
- (ii) pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $f(x+1) - f(x) = \ln(x)$,
- (iii) la fonction f' est croissante,
- (iv) la fonction f s'annule en 1, c'est-à-dire $f(1) = 0$.

Dans la suite, on note (C) l'ensemble de ces quatre conditions.

Partie I - Existence de la solution du problème étudié

Dans cette partie, on construit une fonction vérifiant les conditions de (C).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad u_n(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$$

Q 7 Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

1. Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

Q 8 Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n$ converge absolument et que :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0, +\infty[, \quad u'_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n$$

Q 9 En déduire que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u'_n$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$.

Q 10 Montrer que la fonction φ vérifie les conditions de (C).

Partie II - Unicité de la solution

Dans cette partie, on montre que φ est l'unique fonction vérifiant les conditions de (C). On considère une fonction $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions de (C) et on pose $h = \varphi - g$.

Les questions Q 11 et la question suivante sont indépendantes.

Q 11 Montrer que pour tout $x > 0$, on a $h(x+1) = h(x)$ et $h'(x+1) = h'(x)$.

Q 12 Soient $x \in]0, 1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer successivement que :

$$\varphi'(p) - g'(1+p) \leq h'(x+p) \leq \varphi'(1+p) - g'(p) \text{ et } \varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p}$$

En déduire que

$$|h'(x+p) - h'(p)| \leq \frac{1}{p}$$

Q 13 Déduire des deux questions précédentes que la fonction h' est constante sur $]0, +\infty[$.

Q 14 Conclure que $\varphi = g$.

Partie III - La formule de duplication

Dans cette partie, on considère la fonction $\psi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \psi(x) = (x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(\pi)$$

Q 15 Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a la relation :

$$\exp\left(\sum_{n=1}^N u_n \left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{N+1} (2^N N!)^2}{2N+1 (2N)!}$$

Q 16 Dédurre de la question précédente et de la formule de Stirling que $\psi(1) = 0$.

Q 17 Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$(x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\ln(\pi)$$

Problème 2:

Première partie:

Q 18 Cette question a pour objet de redémontrer la formule du déterminant par blocs.

Soient A, B, C, D des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Justifier brièvement les relations suivantes entre les déterminants de matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définies par blocs et les déterminants de leurs blocs :

$$\det\left(\left(\begin{array}{c|c} I_n & O_n \\ \hline O_n & D \end{array}\right)\right) = \det(D), \quad \det\left(\left(\begin{array}{c|c} I_n & B \\ \hline O_n & I_n \end{array}\right)\right) = 1 \quad \text{et} \quad \det\left(\left(\begin{array}{c|c} A & O_n \\ \hline O_n & I_n \end{array}\right)\right) = \det(A)$$

2. En déduire que $\det\left(\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O_n & D \end{array}\right)\right) = \det(A) \det(D)$.

3. De la question précédente, déduire que $\det\left(\left(\begin{array}{c|c} A & O_n \\ \hline C & D \end{array}\right)\right) = \det(A) \det(D)$.

Dans toute la suite de cette partie, A, B, C, D des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $DC = CD$. Soit la matrice définie par blocs $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Q 19 On suppose, dans cette question uniquement, que D est inversible.

A l'aide du produit $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} D & O_n \\ \hline -C & I_n \end{array}\right)$, montrer que $\det(M) = \det(AD - BC)$.

Q 20 Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q 21 En déduire que $\det(M) = \det(AD - BC)$.

Deuxième partie:

Dans cette partie, q désigne un nombre complexe différent de 0 et de 1. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont on note $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls sauf celui à l'intersection des ligne i et colonne j qui vaut 1).

Soit la matrice non nulle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On note $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

On définit les endomorphismes $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{L}_A$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ par $\mathcal{R}_A(X) = AX$ et $\mathcal{L}_A(X) = XA$ pour tout $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Q 22 Déterminer les matrices de $\mathcal{R}_A$ et $\mathcal{L}_A$ dans la base $\mathcal{B}$.

Q 23 Montrer que la matrice de l'endomorphisme $\mathcal{R}_A - q\mathcal{L}_A$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice définie par blocs par

$$M_A = \left(\begin{array}{c|c} aI_2 - qA^T & bI_2 \\ \hline cI_2 & dI_2 - qA^T \end{array} \right).$$

Q 24 Montrer que l'on a successivement les égalités suivantes

1. $\det(M_A) = \det(A) \det(\tilde{A} + q^2 A - q(a+d)I_2)$,
2. $\det(M_A) = (1-q)^2 \det(A) \det \begin{pmatrix} d - qa & -(1+q)b \\ -(1+q)c & a - qd \end{pmatrix}$,
3. $\det(M_A) = (1-q)^2 \det(A) ((1+q)^2 \det(A) - q(\text{Tr}(A))^2)$.

Q 25 On suppose à présent que le polynôme caractéristique de A se décompose sous forme $P_A(X) = (X - \alpha)(X - \beta)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que l'on a $\det(M_A) = P_A(q\alpha)P_A(q\beta)$.
2. A l'aide des questions précédentes, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
 - il existe une matrice non nulle B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $AB = qBA$
 - on a $\det(A) = 0$ ou $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$.

Q 26 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle telle qu'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle avec $AB = qBA$ où $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que A est semblable à une matrice de l'un des trois types suivants :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & q\alpha \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{C}^*.$$

Exercice 3: Facultatif

On note S l'espace vectoriel des suites réelles bornées

Pour $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S$, on pose $\|\mathbf{u}\| = \sup \{|u_n|, n \in \mathbb{N}\}$.

Q 27 Montrer que l'application $\mathbf{u} \rightarrow \|\mathbf{u}\|$ est une norme de S .

Soit $(\mathbf{u}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de S . Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $\mathbf{u}_p = (u_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$.

Q 28 On suppose que la suite $(\mathbf{u}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{u}$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{n,p})_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers u_n .

Q 29 Soit C le sous-ensemble de S des suites réelles bornées et croissantes.
Montrer que l'ensemble C est fermé.

Q 30 Montrer que la réciproque de la question 28 est fautive. on pourra poser $u_{n,p} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq p+2 \\ \frac{n}{p+1} & \text{si } n \leq p+1 \end{cases}$

CORRECTION

Exercice 1: Recherche de solutions d'équation différentielle sous forme de série trigonométrique

On pose $v_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}$.

R 1 On a $\|v_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ qui entraîne la convergence normale de $\sum_n v_n$.
Les hypothèses du th de continuité sont remplies donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

R 2 On suppose que g est deux fois dérivable et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$, $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n \cos(nx)$ et $g''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 b_n \sin(nx)$.

On a donc $g''(x) - g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -(1+n^2) b_n \sin(nx)$.

En posant $b_n = \frac{1}{n^2(n^2+1)}$, on a $g'' - g = f$.

R 3 Posons $b_n = \frac{1}{n^2(n^2+1)}$ et on pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = b_n \sin(nx)$.

1. On a $u_n(x) = b_n \sin(nx)$, $u_n'(x) = n b_n \cos(nx)$, $u_n''(x) = -n^2 b_n \sin(nx)$.

donc $\|u_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2(n^2+1)}$, $\|u_n'\|_\infty \leq \frac{1}{n(n^2+1)}$ et $\|u_n''\|_\infty \leq \frac{1}{(n^2+1)}$.

On en déduit que $\sum \|u_n\|_\infty$, $\sum \|u_n'\|_\infty$ et $\sum \|u_n''\|_\infty$ convergent donc les séries fonctions $\sum u_n$, $\sum u_n'$ et $\sum u_n''$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

2. On a $g(x+2\pi) = g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx+2n\pi) = g(x)$ donc g est 2π périodique.

Appliquons le théorème de dérivation de la somme (version C^2)

Les fonctions u_n sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

les séries fonctions $\sum u_n$, $\sum u_n'$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$ donc simplement.

la série fonctions $\sum u_n$, $\sum u_n'$ et $\sum u_n''$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$ donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

On a donc g de classe C^2 et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$, $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos(nx)$ et $g''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 b_n \sin(nx)$

donc $g'' - g = f$.

L'équation (E) admet g comme solution 2π périodique.

Exercice 2:

R 4 L'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : M \mapsto M^T$ est linéaire donc continue car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

On déduit que $M \mapsto M - M^T$ est continue.

L'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A \mapsto A^2$ est continue donc, par composition, $M \mapsto (M - M^T)^2$ est continue.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie et $A \mapsto \text{tr}(A)$ est linéaire donc continue donc $M \mapsto \text{tr}(M - (M^T)^2)$ est continue (th de composition).

R 5 $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vu en cours.

R 6 Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ M \mapsto \text{tr} \left(M - (M^T)^2 \right) \end{cases}$ est continue et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie.

D'après le th des bornes atteintes, φ admet un minimum et un maximum:

il existe $(A, B) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$ vérifiant:

$$\forall M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \text{tr} \left(A - (A^T)^2 \right) \leq \text{tr} \left(M - (M^T)^2 \right) \leq \text{tr} \left(B - (B^T)^2 \right).$$

Problème 1:

.1 Partie I - Existence de la solution du problème étudié

R 7 Soit $x \in]0; +\infty[$.

$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o_0(u^2)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = 0$ donc

$$u_n(x) = x \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) - \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right)$$

donc

$$u_n(x) = \frac{x^2 - x}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

Par comparaison aux séries de Riemann (avec $2 > 1$), on en déduit que la série $\sum u_n(x)$ converge absolument.

Cette série est donc convergente. Ceci est vrai pour tout $x \in]0; +\infty[$ donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$.

R 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$x \mapsto 1 + \frac{x}{n}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ donc, par composition, $x \mapsto \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. Par somme, u_n est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

De plus, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} u'_n(x) &= \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} \\ &= \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+x} \\ &= -\frac{1}{n+x} + \frac{1}{n} + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \\ &= \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n \end{aligned}$$

$$\text{où } \varepsilon_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n}.$$

Avec le développement limité de $\ln(1+u)$ comme ci-dessus, on a $\varepsilon_n \sim -\frac{1}{2n^2}$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \varepsilon_n$ converge absolument.

R 9 Soit $(a, b) \in]0; +\infty[^2$ tel que $a < b$.

Pour $x \in [a; b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, d'après l'inégalité triangulaire, (en remarquant que $x > 0$)

$$|u'_n(x)| \leq \frac{x}{n(n+x)} + |\varepsilon_n|$$

$x \in [a; b]$ donc $n(n+x) \geq n(n+a) > 0$ et $\frac{x}{n(n+x)} \leq \frac{b}{n(n+a)}$ puis

$$|u'_n(x)| \leq \frac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n|$$

Quand n tend vers l'infini, $\frac{b}{n(n+a)} \sim \frac{b}{n^2}$ donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{b}{n(n+a)}$ converge. De plus, d'après la question précédente, $\sum |\varepsilon_n|$ converge donc, par somme $\sum \left(\frac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n| \right)$ converge.

On peut alors conclure que la série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement sur $[a; b]$.

R 10 Vérifions les conditions (C):

1. Vérifions (i) : Appliquons le th de dérivation terme à terme:

- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

- La série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement sur tout segment $[a; b]$ inclus dans $]0; +\infty[$ donc elle converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0; +\infty[$.

donc $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment inclus dans $]0; +\infty[$ donc sur $]0; +\infty[$.

En ajoutant la fonction $-\ln$, elle aussi $\mathcal{C}^1$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

De plus, pour $x > 0$, $\varphi'(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n$

2. vérifions (ii)

Soit $x \in]0; +\infty[$.

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = -\ln(x+1) + \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$$

où

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x+1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+x+1) + \ln(n) + \ln(n+x) - \ln(n) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) + \ln(n+x) - \ln(n+1+x) \end{aligned}$$

Par télescopage, pour $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N v_n(x) &= \ln(N+1) - \ln(1) + \ln(1+x) - \ln(N+1+x) \\ &= \ln(1+x) - \ln\left(1 + \frac{x}{N+1}\right) \end{aligned}$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient $\varphi(x+1) - \varphi(x) = -\ln(x+1) + \ln(x) + \ln(1+x) - 0$ donc

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = \ln(x)$$

3. Vérifions (iii): $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$.

Pour $x > 0$, $v'_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2} \geq 0$ donc v_n est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Par somme, on en déduit que φ' est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4. Vérifions (iv):

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(1) = 0$ et $\ln(1) = 0$ donc $\varphi(1) = 0$.

La fonction φ vérifie donc les conditions de (C).

Partie II - Unicité de la solution

R 11 D'après la condition ii) de (C), vérifiée par φ et par g , pour $x > 0$, $h(x+1) - h(x) = \ln(x) - \ln(x) = 0$:

$$\forall x > 0, h(x+1) = h(x)$$

h est la différence de deux fonctions $\mathcal{C}^1$ (i) de (C)) donc on peut dériver de part et d'autre de cette égalité pour obtenir :

$$\forall x > 0, h'(x+1) = h'(x)$$

R 12 Soient $x \in]0; 1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

$$h'(x+p) = \varphi'(x+p) - g'(x+p).$$

φ' est croissante et $p \leq x+p \leq p+1$ donc $\varphi'(p) \leq \varphi'(x+p) \leq \varphi'(1+p)$.

De même $g'(p) \leq g'(x+p) \leq g'(1+p)$ donc $-g'(1+p) \leq -g'(x+p) \leq -g'(p)$. En additionnant, on obtient

$$\varphi'(p) - g'(1+p) \leq h'(x+p) \leq \varphi'(1+p) - g'(p)$$

En dérivant la condition ii), on obtient $g'(1+p) - g'(p) = \frac{1}{p}$ donc $g'(1+p) = g'(p) + \frac{1}{p}$.

Par définition de h , $h'(p) = \varphi'(p) - g'(p)$ donc $\varphi'(p) = h'(p) + g'(p)$.

En faisant la différence des deux relations obtenues,

$$\varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p}$$

On a donc $h'(x+p) \geq h'(p) - \frac{1}{p}$ puis $h'(x+p) - h'(p) \geq -\frac{1}{p}$.

En échangeant les rôles joués par φ et g dans ce qui précède, on obtient $h'(x+p) - h'(p) \leq \frac{1}{p}$.

On a donc l'encadrement

$$-\frac{1}{p} \leq h'(x+p) - h'(x) \leq \frac{1}{p}$$

ce qui correspond à $|h'(x+p) - h'(x)| \leq \frac{1}{p}$.

R 13 Soit $x \in]0; 1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

D'après Q 11., h' est 1-périodique donc, $h'(x+p) = h'(x)$ et $h'(p) = h'(1)$. La question précédente devient alors :

$$|h'(x) - h'(1)| \leq \frac{1}{p}$$

Ceci est vrai pour tout p donc en le faisant tendre vers l'infini, $|h'(x) - h'(1)| = 0$: $h'(x) = h'(1)$.

h' est donc constante sur $]0; 1]$. Par ailleurs, elle est 1-périodique et continue donc elle est constante sur $]0; +\infty[$.

R 14 On note $c \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x > 0$, $h'(x) = c$.

On a alors, pour tout $x > 0$, $h(x) = c(x-1)$ ($h(1) = 0$).

On a aussi, pour tout $x > 0$, $h(x+1) = h(x)$ donc $cx = cx - c$ et $c = 0$.

On a finalement, pour tout $x > 0$, $h(x) = 0$; par conséquent

$$\varphi \equiv g$$

Partie III - La formule de duplication

R 15 Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n \left(\frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (\ln(n+1) - \ln(n)) - \sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{2n+1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(N+1) - \ln \left(\frac{\prod_{n=1}^N (2n+1)}{\prod_{n=1}^N (2n)} \right) \end{aligned}$$

$\prod_{n=1}^N (2n) = 2^N N!$ et en multipliant, divisant par ce produit des pairs pour compléter le produit des impairs,

$$\prod_{n=1}^N (2n+1) = (2N+1) \frac{\prod_{k=1}^{2N} k}{2^N N!}. \text{ Ainsi,}$$

$$\sum_{n=1}^N u_n \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln(N+1) - \ln \left(\frac{(2N+1)(2N)!}{(2^N N!)^2} \right)$$

et, avec les propriétés du $\ln$,

$$\exp \left(\sum_{n=1}^N u_n \left(\frac{1}{2} \right) \right) = \frac{\sqrt{N+1} (2^N N!)^2}{(2N+1)(2N)!}$$

R 16 D'après la formule de Stirling, $N! \sim \sqrt{2\pi} N^{N+1/2} e^{-N}$ donc $(2N)! \sim \sqrt{2\pi} (2N)^{2N+1/2} e^{-2N}$. Par produit et quotient d'équivalents,

$$\begin{aligned} \exp \left(\sum_{n=1}^N u_n \left(\frac{1}{2} \right) \right) &\sim \frac{N^{1/2} 2^{2N} (2\pi) N^{2N+1} e^{-2N}}{(2N) \sqrt{2\pi} (2N)^{2N+1/2} e^{-2N}} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi} 2^{2N} N^{2N+3/2}}{2^{2N+3/2} N^{2N+3/2}} \\ &\sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

Par continuité de la fonction $\exp$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln(\pi) - \ln(2)$ puis $\varphi \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln(\pi)$.

Mais $\psi(1) = 0 + \varphi(1/2) + \varphi(1) - \frac{1}{2} \ln(\pi)$ avec $\varphi(1) = 0$ donc $\psi(1) = 0$.

R 17 Montrons que ψ vérifie les conditions (C) :

1. Par composition et somme, ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.
2. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} \psi(x+1) - \psi(x) &= \ln(2) + \varphi \left(\frac{x+1}{2} \right) - \varphi \left(\frac{x}{2} \right) + \varphi \left(\frac{x+2}{2} \right) - \varphi \left(\frac{x+1}{2} \right) \\ &= \ln(2) + \varphi \left(\frac{x}{2} + 1 \right) - \varphi \left(\frac{x}{2} \right) \\ &= \ln(2) + \ln \left(\frac{x}{2} \right) \\ &= \ln(x) \end{aligned}$$

3. Pour $x > 0$,

$$\psi'(x) = \ln(2) + \frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

φ' est croissante donc, par somme de deux fonctions croissantes, ψ' est croissante sur $]0; +\infty[$.

4. D'après ce qui précède, $\psi(1) = 0$.

- ψ vérifie les conditions (C) donc, par unicité, $\psi = \varphi$ ce qui conduit à

$$\forall x > 0, (x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\ln(\pi)$$

Problème 2:

Partie A.

R 18 Formule du déterminant par blocs

1. Pour la première relation ainsi que la seconde, on peut faire des développements successifs selon la première colonne (n fois). Pour la troisième, on développe cette fois successivement (n fois) par rapport à la dernière colonne.

2. Il suffit de remarquer que $\left(\frac{I_n}{O_n} \middle| \frac{O_n}{D}\right) \left(\frac{I_n}{O_n} \middle| \frac{B}{I_n}\right) = \left(\frac{I_n}{O_n} \middle| \frac{B}{D}\right)$ et $\left(\frac{I_n}{O_n} \middle| \frac{B}{D}\right) \left(\frac{A}{O_n} \middle| \frac{O_n}{I_n}\right) = \left(\frac{A}{O_n} \middle| \frac{B}{D}\right)$ donc

$$\left(\frac{I_n}{O_n} \middle| \frac{O_n}{D}\right) \left(\frac{I_n}{O_n} \middle| \frac{B}{I_n}\right) \left(\frac{A}{O_n} \middle| \frac{O_n}{I_n}\right) = \left(\frac{A}{O_n} \middle| \frac{B}{D}\right)$$

En prenant le déterminant et en utilisant la propriété $\det(M \times N) = \det(M) \times \det(N)$, avec la question précédente,

$$\det\left(\left(\frac{A}{O_n} \middle| \frac{B}{D}\right)\right) = \det(A) \det(D)$$

3. En utilisant l'invariance du déterminant par transposition, on obtient alors

$$\det\left(\left(\frac{A}{C} \middle| \frac{O_n}{D}\right)\right) = \det(A) \det(D)$$

R 19 On a

$$\left(\frac{A}{C} \middle| \frac{B}{D}\right) \left(\frac{D}{-C} \middle| \frac{O_n}{I_n}\right) = \left(\frac{AD - BC}{0_n} \middle| \frac{B}{D}\right)$$

et donc $\det(M) \det(D) = \det(AD - BC) \det(D)$. Si D est inversible, on peut simplifier par $\det(D) \neq 0$ et obtenir

$$\det(M) = \det(AD - BC)$$

R 20 Fait en cours: En posant $D_p = D - \frac{1}{p}I_n$, il existe p_0 un rang à partir duquel D_p est inversible car $\text{sp}(D)$ est fini et $\lim_{p \rightarrow +\infty} D_p = D$

R 21 Posons $M_p = \det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D_p \end{array} \right)$ avec $D_p = D - \frac{1}{p}I_n$ et $p \geq p_0$.

On a $D_p C = DC - \frac{1}{p}C = CD - \frac{1}{p}C = CD_p$ et D_p inversible.

On a donc $\det(M_p) = \det(AD_p - BC)$

Or $\lim_{p \rightarrow +\infty} D_p = D$ donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} M_p = M$ et le déterminant étant une application continue

donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} \det(M_p) = \det(M)$.

De plus, $\lim_{p \rightarrow +\infty} AD_p = AD$ (continuité du produit matriciel) donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} AD_p - BC = AD - BC$ et, par continuité du déterminant, $\lim_{x \rightarrow 0} \det(AD_x - BC) = \det(AD - BC)$. On en déduit,

$$\det(M) = \det(AD - BC)$$

Partie B.

R 22 Il est important de prendre garde à l'ordre des vecteurs choisis pour la base canonique. On a $R_A(E_{1,1}) =$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_{1,1} + cE_{2,1} \text{ donc la première colonne de la matrice de } R_A \text{ est } \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En procédant de même pour les images des autres vecteurs et pour l'endomorphisme L_A , on obtient

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(R_A) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(L_A) = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ c & 0 & a & c \\ 0 & c & b & d \end{pmatrix}.$$

R 23 On écrit les matrices précédentes par blocs

$$\text{Mat}(R_A, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} aI_2 & bI_2 \\ \hline cI_2 & dI_2 \end{array} \right) \text{ et } \text{Mat}(L_A, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} A^T & 0_n \\ \hline 0_n & A^T \end{array} \right)$$

Il suffit alors de combiner ces matrices pour obtenir

$$M_A = \text{Mat}(R_A, \mathcal{B}) - q \text{Mat}(L_A, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} aI_2 - q A^T & bI_2 \\ \hline cI_2 & dI_2 - q A^T \end{array} \right)$$

R 24 Etude de $\det(M_A)$:

1. Comme cI_2 et $dI_2 - q A^T$ commutent, on peut utiliser la formule de la partie A :

$$\begin{aligned} \det(M_A) &= \det((aI_2 - q A^T)(dI_2 - q A^T) - bcI_2) \\ &= \det((ab - bc)I_2 - q(a + d) A^T + q^2 (A^T)^2) \\ &= \det((ab - bc)I_2 - q(a + d)A + q^2 A^2) \end{aligned}$$

La dernière égalité étant due à l'invariance du déterminant par transposition.

On remarque que $A\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \det(A)I_2$ On en déduit que

$$\begin{aligned} \det(M_A) &= \det(A\tilde{A} - q(a + d)A + q^2 A^2) \\ &= \det(A) \det(\tilde{A} + q^2 A - q(a + d)I_2) \end{aligned}$$

2. On a

$$\tilde{A} + q^2 A - q(a + d)I_2 = \begin{pmatrix} (q-1)(qa-d) & b(q-1)(q+1) \\ c(q-1)(q+1) & (q-1)(qd-a) \end{pmatrix}$$

Par multilinéarité du déterminant on a ainsi

$$\det(\tilde{A} + q^2 A - q(a + d)I_2) = (1 - q)^2 \det\left(\begin{pmatrix} qa-d & b(q+1) \\ c(q+1) & qd-a \end{pmatrix}\right)$$

et avec la question précédente,

$$\det(M_A) = (1 - q)^2 \det(A) \det\left(\begin{pmatrix} qa-d & b(q+1) \\ c(q+1) & qd-a \end{pmatrix}\right)$$

3. On a maintenant

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{pmatrix} qa-d & b(q+1) \\ c(q+1) & qd-a \end{pmatrix}\right) &= (qa-d)(qd-a) - (q+1)^2 bc \\ &= (q^2+1)ad - q(d^2+a^2) - (q+1)^2 bc \\ &= (q^2+2q+1)ad - q(d^2-2ad+a^2) - (q+1)^2 bc \\ &= (1+q)^2 \det(A) - q(\text{Tr}(A))^2 \end{aligned}$$

et la question précédente donne

$$\det(M_A) = (1 - q)^2 \det(A) ((1 + q)^2 \det(A) - q(\text{Tr}(A))^2)$$

R 25 On suppose $P_A(X) = (X - \alpha)(X - \beta) = X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta$

1. On a donc $\text{Tr}(A) = \alpha + \beta$ et $\det(A) = \alpha\beta$. La question précédente donne alors

$$\det(M_A) = (1 - q)^2 \alpha\beta((1 + q)^2 \alpha\beta - q(\alpha + \beta)^2) = (1 - q)^2 \alpha\beta((1 + q^2)\alpha\beta - q\alpha^2 - q\beta^2)$$

Il reste à remarquer que $P_A(q\alpha)P_A(q\beta) = (q-1)^2 \alpha\beta(q\beta - \alpha)(q\alpha - \beta)$ et à développer le dernier produit pour conclure que

$$\det(M_A) = P_A(q\alpha)P_A(q\beta)$$

2. On travaille en deux temps.

- S'il existe $B \neq 0$ telle que $AB = qBA$ alors $(R_A - qL_A)(B) = AB - qBA = 0$ et donc $\ker(R_A - qL_A) \neq \{0\}$ donc $R_A - qL_A$ n'est pas bijective donc $\det(M_A) = 0$ et donc $P_A(q\alpha) = 0$ ou $P_A(q\beta) = 0$ c'est à dire $q\alpha \in \{\alpha, \beta\}$ ou $q\beta \in \{\alpha, \beta\}$. Si $\det(A) \neq 0$ alors α et β sont non nuls (0 non valeur propre de A) et $q\alpha \neq \alpha$, $q\beta \neq \beta$ ($q \neq 1$). La condition devient alors $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$.

Finalement, on a $\det(A) = 0$ ou $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$.

- Réciproquement, si cette condition a lieu alors $\det(M_A) = 0$ et $R_A - qL_A$ n'est pas inversible. Il existe $B \neq 0$ dans son noyau et ceci s'écrit $AB = qBA$.

R 26 Distinguons trois cas.

- 0 est valeur propre simple de A . Dans ce cas, il existe une autre valeur propre complexe $\alpha \neq 0$ et A est diagonalisable, semblable à $\text{diag}(\alpha, 0)$ (deux sous-espaces propres qui sont des droites).

- 0 est valeur propre double. Dans ce cas, $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est trigonalisable donc semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et

$\text{sp}(A) = \text{sp}(T) = \{\lambda, \mu\}$ donc $\lambda = \mu = 0$ donc A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\gamma \neq 0$ car $A \neq 0$. Si T

est canoniquement associé à f , alors $\text{Mat}_{(e_1, \gamma e_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc T est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc A est

semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si 0 n'est pas valeur propre de A alors $\det(A) \neq 0$ et $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$. Comme $q \neq 1$, on a $\alpha \neq \beta$ et on a deux valeurs propres. A est diagonalisable et, quitte à intervertir le rôle de α et β , est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & q\alpha \end{pmatrix}$.

Exercice 3: Facultatif

On note S l'espace vectoriel des suites réelles bornées

Pour $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S$, on pose $\|\mathbf{u}\| = \sup \{|u_n|, n \in \mathbb{N}\}$.

R 27 idem démonstration de cours sur la norme infinie.

R 28 Soit $(\mathbf{u}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de S (c'est-à-dire une suite de suites). Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $\mathbf{u}_p = (u_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$. On suppose que la suite $(\mathbf{u}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{u}$. On a donc $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_p\| \rightarrow_{p \rightarrow +\infty} 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $|u_{n,p} - u_n| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_p\| \rightarrow_{p \rightarrow +\infty} 0$ donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_{n,p} = u_n$ la suite $(u_{n,p})_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers u_n . (analogue pour les suites de fonctions à CV uniforme $\Rightarrow$ CV simple).

R 29 Soit une suite $(\mathbf{u}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge de C qui converge vers $\mathbf{u} \in S$.

Montrons que $\mathbf{u} \in \mathbf{C}$ cad $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.

On a $\mathbf{u}_p \in C$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n,p} \leq u_{n+1,p}$ et d'après la question précédente, $(u_{n,p})_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers u_n donc par passage à la limite,

$u_n \leq u_{n+1}$ donc $\mathbf{u}$ est une suite croissante donc $\mathbf{u} \in \mathbf{C}$ donc $\mathbf{C}$ est fermée.

R 30 On pose $u_{n,p} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq p+2 \\ \frac{n}{p+1} & \text{si } n \leq p+1 \end{cases}$.

Soit n fixé. On a, pour $p \geq n-1$, $u_{n,p} = \frac{n}{p+1} \rightarrow_{p \rightarrow +\infty} 0$ donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_{n,p} = 0$. noté u_n .

Soit $\mathbf{u}$ la suite nulle.

On a $\|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n,p} - u_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n,p}| \geq |u_{p+1,p}| = 1$ donc $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_p\| \not\rightarrow_{p \rightarrow +\infty} 0$

donc la $(\mathbf{u}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers $\mathbf{u}$.