

Exercice 1: Extension aux bornes du développement en série entière de arctangente

Q 1 Montrer que la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, 1]$, $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

Q 2 Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[-1, 1]$

Q 3 En déduire que $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Q 4 En déduire une fonction python **approx(epsilon)** d'argument epsilon réel strictement positif qui renvoie une valeur approchée de π à epsilon près.

Remarque La convergence n'est pas très rapide (en $\frac{1}{n}$) donc cette méthode n'est pas très efficace pour calculer les décimales de π .

Exercice 2: Exemples d'application du théorème de dérivation terme à terme version C^∞

La difficulté pour dériver terme à terme indéfiniment la somme d'une série de fonctions (hormis le cas des séries entières sur $] -R, R[$ réside dans le calcul des dérivées successives

Premier exemple (avec des fonctions à valeurs complexes)

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{e^{i\frac{x}{n+1}}}{n^2+1}$.

Q 5 Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

Q 6 Justifier que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Q 7 Soit $k \in \mathbb{N}^*$ Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est de classe C^k et déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, $u_n^{(k)}(x)$.

Q 8 En déduire que S est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Deuxième exemple

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$

Q 9 Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Q 10 Justifier que u_n est de classe C^∞ . Déterminer u'_n et u''_n .

Q 11 Montrer qu'il existe des polynômes $P_1, \dots, P_k$ polynômes tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^k \frac{P_i(x)}{(n^2 + x^2)^{i+1}}.$$

Q 12 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $a < b$. En déduire que la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, b]$.

Q 13 En déduire que S est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite, on cherche à établir la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ sur $\mathbb{R}$ en améliorant la précision des calculs précédent.

Q 14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Justifier qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{n^2 + x^2} = \frac{a_n}{n + ix} + \frac{b_n}{n - ix}$.

En déduire un calcul de $u_n^{(k)}(x)$.

Q 15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left| u_n^{(k)}(x) \right| \leq \frac{k!}{n^{k+2}}$

Q 16 En déduire que la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Troisième exemple

On pose, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0; +\infty[$, $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n+x}$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Q 17 Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

Q 18 En déduire que S est de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 3: Exemple d'application linéaire continue en dimension infinie (facultatif)

Soit $\mathcal{L}^1$ l'espace vectoriel (sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) des fonctions $f : \begin{cases} [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto f(t) \end{cases}$ continues et intégrables. et $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel (sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) des fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ bornées

(on ne demande pas de montrer que ces ensembles sont bien des espaces vectoriels).

Pour $f \in \mathcal{L}^1$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ et pour $g \in \mathcal{B}$, on pose $\|g\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$.

On admet que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|$ sont des normes respectivement de $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{B}$.

Q 19 Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1$ et $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) e^{ixt} dt$ converge.

Pour $f \in \mathcal{L}^1$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $\varphi(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{ixt} dt$. D'après ce qui précède, $\varphi(f)$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Attention 1 Ne pas confondre les notations φ , $\varphi(f)$ et $\varphi(f)(x)$.

Q 20 Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1$ alors $\varphi(f) \in \mathcal{B}$.

On peut donc définir l'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}^1 \rightarrow \mathcal{B} \\ f \mapsto \varphi(f) \end{cases}$

Q 21 Montrer que φ est linéaire.

Q 22 Justifier que si $f \in \mathcal{L}^1$ alors $\|\varphi(f)\| \leq \|f\|_1$.
En déduire que l'application φ est continue.

Exercice 4: Densité de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (facultatif)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{E}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables.

Q 23 Soit $T = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 & & 0 \\ p & \frac{2}{p} & & \\ 0 & p & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & \frac{n}{p} \end{pmatrix}$ et $T_p = T + D_p$

On pose $T_p = (t_{i,j}(p))$

1. Montrer que pour tout $(i, j) \in [[1, n]]^2$ tel que $i \neq j$, il existe $p_{i,j} \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall p \geq p_{i,j}$ $t_{i,i}(p) \neq t_{j,j}(p)$ (on pourra distinguer deux cas).
2. En déduire que T est un point adhérent à $\mathcal{E}_n(\mathbb{C})$.

Q 24 En déduire que $\mathcal{E}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 1: Extension aux bornes du développement en série entière de arctangente

Il s'agit de la même démarche que l'exercice d'extension du DSE de $\ln(1+x)$. Sy référer pour plus de détails

R 1 la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est dérivable de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n$ pour $x \in]-1, 1[$.

Par intégration terme à terme du DSE sur $] -1, 1[$, $\arctan(x) - \arctan(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

R 2 Soit $x \in [-1, 1]$.

On peut appliquer CSSA (détails laissé au lecteur) à $\sum u_n(x)$ (inutile d'enlever les $x < 0$ ici car x^{2n+1} est de signe constant si $x < 0$).

On en déduit $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right| \leq \frac{1}{2n+3}$.

On a donc $\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{2n+3} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[-1, 1]$.

Q 25 Pour $x \in [-1, 1]$, posons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

D'après la question précédente (u_n étant continue) la fonction S est continue sur $[-1, 1]$.

On a donc $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} S(x) = S(1)$ donc $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ soit $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Q 26 On a $|R_n(1)| = \left| \frac{\pi}{4} - \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{2i+1} \right| \leq \frac{1}{2n+3}$.

```
def approx(epsilon):
    S=1,n=0
    sg=1
    while 2n+3<1/epsilon:
        n+=1
        sg=-sg
        S+=sg*1/(2n+1)
    return S
```

Exercice 2: Exemples d'application du théorème de dérivation terme à terme version C^∞

La difficulté pour dériver terme à terme indéfiniment la somme d'une série de fonctions (hormis le cas des séries entières sur $] -R, R[$ réside dans le calcul des dérivées successives

Premier exemple (avec des fonctions à valeurs complexes)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{e^{i \frac{x}{n+1}}}{n^2 + 1}$.

R 3 $|u_n(x)| = \frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2}$ donc $\sum u_n(x)$ converge absolument donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

R 4 $\|u\|_{\infty} \leq \frac{1}{n^2}$ donc $\sum \|u_n\|_{\infty}$ converge donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$. et $\forall n, u_n$ est continue donc S est définie (déjà vu) et continue sur $\mathbb{R}$.

R 5 $x \mapsto e^{ix}$ est C^{∞} donc $\forall n, u_n$ est de classe C^k et par récurrence immédiate, .

R 6 $\left| u_n^{(k)}(x) \right| = \left| \left(\frac{1}{n+1} \right)^k \frac{1}{n^2+1} \right| = \frac{1}{(n^2+1)(n+1)^k}$ donc $\left\| u_n^{(k)} \right\|_{\infty} = \frac{1}{(n^2+1)(n+1)^k} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{k+2}}$.

donc $\sum \left\| u_n^{(k)} \right\|_{\infty}$ converge donc la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$.

R 7 (H_1) : Pour tout n u_n est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$.

(H_2) : la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$

(H_3) : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que S est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ et $S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x)$.

Deuxième exemple

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$

R 8 Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a $u_n(x) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}$ donc la série numérique $\sum u_n(x)$ converge donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

R 9 u_n est de classe C^{∞} car inverse de fonction C^{∞} . Calcul de u'_n et u''_n fait en exercice:

$$u'_n(x) = \frac{-2x}{(n^2+x^2)^2} \text{ et } u''_n(x) = 8 \frac{x^2}{(n^2+x^2)^3} - \frac{2}{(n^2+x^2)^2}.$$

R 10 Le résultat demandé est vrai pour $k=1$ et $k=2$.

Soit $k \geq 1$.

Supposons qu'il existe des polynômes $P_1, \dots, P_k$ polynômes tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^k \frac{P_i(x)}{(n^2+x^2)^{i+1}} = \sum_{i=1}^k P_i(x) (n^2+x^2)^{-(i+1)}.$$

On a alors $u_n^{(k+1)}(x) = \sum_{i=1}^k \frac{P_i(x)}{(n^2+x^2)^{i+1}} = \sum_{i=1}^k -2(i+1) \times 2x \times P_i(x) (n^2+x^2)^{-(i+2)} + P'_i(x) (n^2+x^2)^{-(i+1)}$ donc (changement d'indice et regroupement)

$$u_n^{(k+1)}(x) = \underbrace{-2(k+1) \times 2x \times P_k(x)}_{Q_{k+1}(x)} (n^2+x^2)^{-(k+2)} + \sum_{i=2}^k \underbrace{(-2(i) \times 2x \times P_{i-1}(x) + P'_i(x))}_{Q_i(x)} (n^2+x^2)^{-(i+1)} + \underbrace{P'_1(x)}_{Q_1(x)} (n^2+x^2)^{-2}$$

ce qui donne le résultat pour $k+1$.

R 11 On a alors $\left| u_n^{(k+1)}(x) \right| = \left| \sum_{i=1}^k \frac{P_i(x)}{(n^2+x^2)^{i+1}} u_n^{(k+1)}(x) \right| \leq \sum_{i=1}^k \frac{|P_i(x)|}{n^{2(i+1)}}.$

Les polynômes $P_1, \dots, P_k$ sont des fonctions sur $[a, b]$ donc bornées sur $[a, b]$. Il existe M_i tel que $\forall x \in [a, b]$, $|P_i(x)| \leq M_i$ donc

$$\forall x \in [a, b], \left| u_n^{(k+1)}(x) \right| \leq \sum_{i=1}^k \frac{M_i}{n^{2(i+1)}} = \alpha_n.$$

On a donc $\left\| u_n^{(k)} \right\|_{\infty}^{[a, b]} \leq \alpha_n$ et $\alpha_n = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^4} \right)$ donc la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement $[a, b]$.

R 12 Les hypothèses (H_1) , (H_2) et (H_3) sont réalisées sur $[a, b]$ donc S est de classe C^∞ sur $[a, b]$ avec $[a, b]$ segment quelconque de $\mathbb{R}$ donc S est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (et on peut dériver terme à terme).

R 13 On a $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{n^2 + x^2} = \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{n + ix} + \frac{1}{n - ix} \right)$.

R 14 Posons $v_n(x) = \frac{1}{n + ix} = (n + ix)^{-1}$ et $w_n(x) = \frac{1}{n - ix}$

On montre par récurrence que $v_n^{(k)}(x) = (-1)(-2)\dots(-k) i^k (n + ix)^{-1-k} = \frac{(-1)^k i^k k!}{(n + ix)^{1+k}}$

(idem pour $w_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k (-i)^k k!}{(n - ix)^{1+k}}$) donc $u_n^{(k)}(x) = \frac{1}{2n} \left(\frac{(-1)^k i^k k!}{(n + ix)^{1+k}} + \frac{(-1)^k (-i)^k k!}{(n - ix)^{1+k}} \right)$

R 15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\left| u_n^{(k)}(x) \right| \leq \frac{1}{2n} \left(\left| \frac{(-1)^k i^k k!}{(n + ix)^{1+k}} \right| + \left| \frac{(-1)^k (-i)^k k!}{(n - ix)^{1+k}} \right| \right) \leq \frac{k!}{n^{k+2}}$ car $|n + ix| \geq n$.

R 16 $\left\| u_n^{(k)} \right\|_\infty \leq \frac{k!}{n^{k+2}}$ et $k + 2 > 1$ donc la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Troisième exemple

On pose, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n + x}$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

R 17 Posons $f(x) = e^{-nx}$ et $g(x) = \frac{1}{n + x}$.

Les fonction f et g sont C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

D'après la formule de Leibniz, $u_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(k-i)}(x) g^{(i)}(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} n^{k-i} e^{-nx} \frac{(-1)^i i!}{(n + x)^{i+1}}$.

On a donc, si $x \geq a$, $\left| u_n^{(k)}(x) \right| \leq \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} e^{-na} \frac{n^{k-i} i!}{n^{i+1}} \leq n^k e^{-na} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} i! \right)}_{C \text{ indépendant de } n} = \alpha_n$ donc $\left\| u_n^{(k)} \right\|_\infty^{[a, +\infty[} \leq \alpha_n =$

$C n^k e^{-na}$.

Or $n^k e^{-na} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$ donc $\sum \alpha_n$ converge donc la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

R 18 (H_2) est vérifiée (CV simple: si $x > 0$, $u_n = o_{n \rightarrow +\infty} (e^{-nx})$)

Les hypothèses (H_1) , (H_2) et (H_3) sont réalisées sur $[a, +\infty[$ donc S est de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ quelconque donc S est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3: Exemple d'application linéaire continue en dimension infinie

Soit $\mathcal{L}^1$ l'ensemble des fonctions $f : \begin{cases} [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto f(t) \end{cases}$ continues et intégrables. et $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ bornées.

Pour $f \in \mathcal{L}^1$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^{+\infty} f(t) dt$ et pour $g \in \mathcal{B}$, on pose $\|g\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$.

On admet que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|$ sont des normes respectivement de $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{B}$.

Pour $f \in \mathcal{L}^1$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $\varphi(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{ixt} dt$.

R 19 Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a $|f(t)e^{ixt}| = |f(t)|$ et f intégrable sur $[0, +\infty[$ donc $t \mapsto f(t)e^{ixt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt} dt$ converge.

R 20 De plus $\int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt} dt$ converge absolument donc $|\varphi(f)(x)| = \left| \int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)e^{ixt}| dt = \int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ indépendant de x . La fonction $\varphi(f)$ est bornée donc $\varphi(f) \in \mathcal{B}$.

R 21 Soit λ, μ complexes et f et g dans $\mathcal{L}^1$.

Montrons que $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)$ soit $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \varphi(f)(x) + \mu \varphi(g)(x)$.

On a $\varphi(\lambda f + \mu g)(x) = \int_0^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t)e^{ixt} dt = \lambda \int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt} dt + \mu \int_0^{+\infty} g(t)e^{ixt} dt$ (linéarité des intégrales convergentes).

R 22 Si $f \in \mathcal{L}^1$ alors on a vu que $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\varphi(f)(x)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| dt = \|f\|_1$.

On a donc $\|\varphi(f)\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(f)(x)| \leq \|f\|_1$.

On en déduit que $\|\varphi(f) - \varphi(g)\| = \|\varphi(f - g)\| \leq \|f - g\|_1$ donc φ est 1 lipschitzienne donc est continue.

Exercice 4: Densité de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (facultatif)

R 23 $t_{i,i}(p) = t_{i,i} + \frac{i}{p}$

1. premier cas: $t_{i,i} = t_{j,j}$. On a $\frac{i}{p} \neq \frac{j}{p}$ donc $\forall p \in \mathbb{N}^*, t_{i,i}(p) \neq t_{j,j}(p)$

deuxième cas: $t_{i,i} \neq t_{j,j}$. Posons $\varepsilon = |t_{i,i} - t_{j,j}|$

On a $\lim_{p \rightarrow +\infty} t_{i,i}(p) = t_{i,i}$ donc il existe un rang p_1 à partir duquel $|t_{i,i} - t_{i,i}(p)| < \frac{\varepsilon}{2}$ de même un rang p_2 à partir duquel $|t_{j,j} - t_{j,j}(p)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Pour $p \geq p_{i,j} = \max(p_1, p_2)$, si on avait $t_{i,i}(p) = t_{j,j}(p)$, on en déduirait $|t_{i,i} - t_{j,j}| < \varepsilon$ absurde donc $t_{i,i}(p) \neq t_{j,j}(p)$.

2. La suite (D_p) converge vers la matrice nulle donc La suite (T_p) converge vers T .

si $p \geq \max_{(i,j) \in [1,n]^2, i \neq j} p_{i,j} = pp$ alors si $i \neq j$ alors $t_{i,i}(p) \neq t_{j,j}(p)$ et $\text{sp}(T_p) = \{t_{i,i}(p)\}$ car T est triangulaire

donc T_p admet n valeurs propres distinctes donc est diagonalisable. La suite $(T_p)_{p \geq pp}$ est une suite de $\mathcal{E}_n(\mathbb{C})$ qui converge vers T donc T est un point adhérent à $\mathcal{E}_n(\mathbb{C})$.

R 24 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le polynôme caractéristique de M est scindé donc M est trigonalisable.

Il existe T triangulaire sup et P inversible telle que $M = PTP^{-1}$.

D'après la question précédente, il existe une suite (T_p) de $\mathcal{E}_n(\mathbb{C})$ qui converge vers T

Posons $M_p = PTP^{-1}$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} MPTP^{-1}$ (continuité du produit matriciel) et M_p diagonalisable car semblable à T_p donc $\mathcal{E}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.