

Sujet de révision pour les écrits: Fonction Digamma

On rappelle que l'on peut définir la fonction Γ sur $]0, +\infty[$ par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Cette fonction a les propriétés suivantes (admisses dans ce problème) :

- Pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t} dt$.

On définit la fonction ψ (fonction Digamma) par : $\forall x > 0, \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

Préliminaire

Q1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$, de terme général $u_n = \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n}$, converge.

Q2. Montrer que la suite de terme général $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge.

La limite de la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ sera notée γ dans tout le sujet (γ est appelée la constante d'Euler).

Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

Q3. Pour $x \in]0, +\infty[$ et pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in]0, n] \\ 0 & \text{si } t \in]n, +\infty[\end{cases}$$

(a) Démontrer que, pour tout $x < 1, \ln(1-x) \leq -x$.

En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $t \in]0, +\infty[$,

$$0 \leq f_n(t) \leq e^{-t} t^{x-1}$$

(b) En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

Q4. On pose, pour n entier naturel et pour $x \in]0, +\infty[$, $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$.

(a) Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $I_n(x)$, déterminer, pour $x > 0$ et pour $n \geq 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

(b) En déduire, pour n entier naturel et pour $x \in]0, +\infty[$ une expression de $I_n(x)$.

(c) Démontrer que: $\forall x > 0, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$.

Q5. En remarquant que, pour $n \geq 1$ et $x \in]0, +\infty[$, $\frac{1}{n^x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) = e^{xH_n} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right]$,

démontrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$: $\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right]$ (f. de WEIERSTRASS).

Q6. (a) En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right]$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

(b) On pose, pour tout $x \in]0, +\infty[$: $g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right]$. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$ comme somme d'une série de fonctions.

(c) En déduire que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\psi(x) = \frac{-1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$.

- Q7. (a) Que vaut $\psi(1)$? En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.
- (b) Calculer, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\psi(x+1) - \psi(x)$,
puis démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
- (c) On pose, pour tout $(x, y) \in]0, +\infty$ et k entier naturel, $j_k(y) = \frac{1}{k+y+1} - \frac{1}{k+y+x}$.
Démontrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} j_k$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$.
- (d) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi(x+n) - \psi(1+n) = 0$.
- Q8. Déterminer l'ensemble des applications $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les trois conditions :
- $f(1) = -\gamma$,
 - pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x+1) = f(x) + \frac{1}{x}$,
 - pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x+n) - f(1+n)) = 0$.

Une utilisation de la fonction Digamma

- Q9. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue un premier tirage au hasard d'une boule dans l'urne et on adopte le protocole suivant: si on a tiré la boule numéro k , on la remet alors dans l'urne avec k nouvelles boules toutes numérotées k . Par exemple, si on a tiré la boule numéro 3, on remet quatre boules de numéro 3 dans l'urne (la boule tirée plus trois nouvelles boules numérotées 3).
- On effectue ensuite un deuxième au hasard tirage d'une boule.
- On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au premier tirage (respectivement au deuxième tirage).
- (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X ainsi que son espérance $\mathbf{E}(X)$.
- (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y et vérifier que, pour tout entier naturel non nul $k \in Y(\Omega)$, on a :

$$P(Y = k) = \frac{1}{n} \left(\psi(2n+1) - \psi(n+1) + \frac{k}{n+k} \right).$$

- (c) Exprimer l'espérance $\mathbf{E}(Y)$ à l'aide de ψ . On pourra utiliser sans démonstration que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n(n+k)} = \frac{1-n}{2} + n(\psi(2n+1) - \psi(n+1)).$$

Indications

Q1. Théorème de comparaison sur les séries avec un équivalent.

Q2. Utiliser Q1. et reconnaître ce que représente H_n par rapport à la série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_n$

Q3. (a) Par étude de fonction .

Calcul sur les inégalités .

(b) Utiliser Q3. a pour la domination

Q4. (a) Existence d'une intégrale impropre par théorème de comparaison. Intégration par parties dans une intégrale impropre.

(b) Conjecture puis récurrence.

(c) Question de synthèse des résultats précédents.

Faire le lien entre $\Gamma(x)$ et $I_n(x)$ à l'aide d'un changement de variable

Q5. Utiliser Q4. c.

Q6. (à partir d'ici cela commence à devenir un peu plus technique...)

(a) Revenir à la définition de la convergence simple d'une série de fonctions

(b) Par théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions (chap. thm d'interversion et Séries)

La CVN est plus facile à montrer que la CVU; si nécessaire, se placer sur un segment plutôt que sur $]0, +\infty[$.

(c) Question de synthèse des résultats précédents.

Faire le lien entre $\ln(\Gamma(x))$ et $g(x)$ avec Q5. et utiliser (a) et (b).

Q7. (a) Utiliser la question précédente Q6. c et un télescopage.

Reconnaître l'intégrale à calculer avec l'un des résultats admis au début.

Faire le lien avec la définition de ψ .

(b) Utiliser Q6. c et un télescopage.

Remplacer x par k et faire encore un télescopage

(c) Montrer une CVN en majorant $|j_k(y)|$ indépendamment de y (mais x, k possibles).

Q8. Par analyse-synthèse.

Q9. Question indépendante du reste en admettant les résultats précédents de Q6c et Q7a Q7b.

(a) Reconnaître une loi usuelle. Utiliser la définition de l'espérance pour faire le calcul.

(b) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = j)$, en déduire la loi du couple X, Y puis la loi de Y .

(c) Utiliser la définition de l'espérance pour faire le calcul et les résultats précédents.

CORRECTION Fonction Digamma (CCP MP 2016, modifié)

Préliminaire

Q1. D'après le développement limité usuel $\ln(1+x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, en prenant $x = \frac{1}{n}$ qui tend bien vers 0, on a :

$$u_n = \ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} \geq 0.$$

Comme la série de Riemann $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, par théorème de comparaison, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ converge. Autre idée : par comparaison série-intégrale, on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$.

Q2. Pour $n \geq 2$, par relation de Chasles, on a : $\sum_{k=2}^n u_k = \int_1^n \frac{dt}{t} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$,

d'où : $\sum_{k=2}^n u_k = \ln(n) + 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 - H_n$.

Or $\left(\sum_{k=2}^n u_k\right)_{n \geq 2}$ converge d'après la question précédente, donc $(H_n)_{n \geq 1}$ converge.

Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

Q3. Pour $x \in]0, +\infty[$ et pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \in]0, n] \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}.$$

(a) On peut établir l'inégalité souhaitée par étude de la fonction $x \mapsto \ln(1-x) + x$ sur $] -\infty, 1[$.

La fonction f_n est clairement positive d'après sa définition.

De plus, pour tout $t \in]0, n[$, $f_n(t) = e^{n \ln(1-\frac{t}{n})} t^{x-1}$, avec $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$ par la question précédente, vu qu'on a bien $\frac{t}{n} < 1$ pour $t \in]0, n[$. On en déduit, par croissance de l'exponentielle et produit par une quantité positive : $f_n(t) \leq e^{n \times (-\frac{t}{n})} t^{x-1} = e^{-t} t^{x-1}$. Enfin f_n est nulle sur $[n, +\infty[$, tandis que la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est positive, d'où finalement l'encadrement :

$$\forall t > 0, 0 \leq f_n(t) \leq e^{-t} t^{x-1}.$$

(b) Comme demandé, on applique le théorème de convergence dominée à la suite (f_n) :

- Pour tout $n \geq 1$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour t fixé, si n est assez grand ($n > t$), on a : $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$.

Or, $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n \ln(1-\frac{t}{n})}$, et $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) = -\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$,
donc $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n(-\frac{t}{n} + o(\frac{1}{n}))} = e^{-t+o(1)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-t}$,
par continuité de l'exponentielle. Donc $f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-t} t^{x-1}$.

On a ainsi prouvé que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$.

- De plus, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t > 0$, $|f_n(t)| \leq e^{-t} t^{x-1}$ par la question précédente, et on a admis au début du problème que la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ (qui ne dépend pas de n) est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc, par le théorème de convergence dominée, $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

Comme f_n est nulle sur $[n, +\infty[$, cela donne finalement :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma(x),$$

Q4. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$.

La fonction $\alpha : u \mapsto (1-u)^n u^{x-1}$ est définie et continue sur $]0, 1]$.

De plus, $\alpha(u) \underset{u \rightarrow 0^+}{\sim} u^{x-1} = \frac{1}{u^{1-x}}$, avec $1-x < 1$, donc α est intégrable sur $]0, 1]$ par comparaison de fonctions positives puisque $u \mapsto \frac{1}{u^{1-x}}$ est intégrable sur $]0, 1]$. Ainsi $I_n(x)$ est bien définie.

Par intégration par parties sur $]0, 1]$ avec $U : u \mapsto (1-u)^n$ et $V : u \mapsto \frac{u^x}{x}$ (de classe C^1), on a :

$$I_n(x) = \left[(1-u)^n \times \frac{u^x}{x} \right]_0^1 - \int_0^1 n(1-u)^{n-1} \frac{u^x}{x} du = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1).$$

Ainsi $I_n(x) = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1)$.

(b) Comme $I_0(x) = \int_0^1 u^{x-1} du = \left[\frac{u^x}{x} \right]_0^1 = \frac{1}{x}$.

Par une récurrence immédiate, sur $n \geq 1$, on obtient

$$I_n(x) = \frac{n!}{x(x+1) \cdots (x+n-1)} I_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}.$$

(c) Par changement de variable $u = \frac{t}{n}$ (la fonction $t \mapsto \frac{t}{n}$ réalise une bijection strictement croissante et de classe C^1 de $]0, n]$ sur $]0, 1]$), on obtient donc :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n du = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du = n^x I_n(x)$$

Le résultat de la question Q3. b se réécrit alors : $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x I_n(x)$.

Le calcul de la question précédente permet donc de conclure :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \times \frac{n!}{x(x+1) \cdots (x+n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}.$$

Q5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$.

L'indication donnée est immédiate en remarquant qu'on a :

$$e^{xH_n} = e^{x \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} e^{-x \ln(n)} = \left(\prod_{k=1}^n e^{\frac{x}{k}} \right) \times \frac{1}{n^x}.$$

Ensuite, d'après la formule établie à la question précédente, on a :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\prod_{k=0}^n (x+k)}{n! n^x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n^x} \times \frac{\prod_{k=1}^n (k+x)}{\prod_{k=1}^n k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n^x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

Grâce à l'indication fournie, on réécrit :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x e^{xH_n} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right].$$

Or $H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma$ donc, par continuité de l'exponentielle, $e^{xH_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{x\gamma}$ et, finalement, par produit de limites,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{x\gamma} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right]$$

Q6. (a) On note qu'on pourrait répondre directement à la question à l'aide d'un DL d'ordre 2.

Si l'on veut rester dans les clous du sujet, on commence par réécrire la formule précédente :

$$\prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Gamma(x) x e^{\gamma x}}$$

Par continuité de $\ln$, on en déduit :

$$\ln \left(\prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right] \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{\Gamma(x) x e^{\gamma x}} \right), \text{ i.e. } \sum_{k=1}^n \left[\ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(\Gamma(x) x e^{\gamma x}).$$

En particulier, on a prouvé que la série $\sum_{k \geq 1} \left[\ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right]$ converge. Ceci ayant été démontré pour tout $x > 0$, on a établi la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} g_k$ sur $]0, +\infty[$, où l'on pose $g_k : x \mapsto \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}$.

(b) On note $g = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k$ sur $]0, +\infty[$. On utilise le théorème de dérivation terme à terme :

- la convergence de $\sum_{k \geq 1} g_k$ vers g a été établie à la question précédente,
- Les fonctions g_k sont toutes de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $k \geq 1$, pour tout $x > 0$, $g'_k(x) = \frac{1}{k+x} - \frac{1}{k} = -\frac{x}{k(k+x)}$.

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$. On a donc $0 < a \leq b$. Alors pour tout $k \geq 1$ et tout $x \in [a, b]$, $|g'_k(x)| \leq \frac{b}{k^2}$ et, comme $\sum_{k \geq 1} \frac{b}{k^2}$ converge, on a établi la convergence normale, donc uniforme, de $\sum_{k \geq 1} g'_k$ sur $[a, b]$.

On en déduit que g est de classe C^1 , avec : $\forall x > 0$, $g'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} g'_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k} \right)$.

(c) Par la question Q6. b, en prenant le logarithme on a, pour tout $x > 0$,

$$\ln(\Gamma(x)) - = g(x) - \ln(x) - \gamma x$$

Dérivant cette relation sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient:

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -g'(x) - \frac{1}{x} - \gamma = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) - \frac{1}{x} - \gamma$$

Q7. (a) Posant $x = 1$ dans la formule précédente, on trouve : $\psi(1) = -1 - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$, d'où, par télescopage, $\psi(1) = -1 - \gamma + 1 = -\gamma$.

De plus $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_0^X = \lim_{X \rightarrow +\infty} 1 - e^{-X} = 1$ donc, vu que $\psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$, on obtient $\Gamma'(1) = -\gamma$.

Mais en reprenant l'expression admise au début de l'énoncé, on constate que $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$, d'où finalement :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt = -\gamma$$

(b) D'après la formule de la question Q6. c, on a, pour tout $x > 0$,

$$\psi(x+1) - \psi(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} \right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+x} \right)$$

par somme de séries convergentes. Et donc :

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right) = \frac{1}{x}.$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\psi(k+1) - \psi(k) = \frac{1}{k}$.

Donc, par télescopage et avec le (a), on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} (\psi(k+1) - \psi(k)) = \psi(n) - \psi(1) = \psi(n) + \gamma$$

Soit :

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

(c) Soit $x > 0$ fixé. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit $j_k : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ y & \longmapsto \frac{1}{k+y+1} - \frac{1}{k+y+x} \end{cases}$.

On peut réécrire $j_k(y) = \frac{k+y+x-k-y-1}{(k+y+1)(k+y+x)} = \frac{x-1}{(k+y+1)(k+y+x)}$ donc,

$$\forall y > 0, |j_k(y)| \leq \frac{|x-1|}{(k+1)(k+x)}$$

Comme $\sum_{k \geq 0} \frac{|x-1|}{(k+1)(k+x)}$ est une série convergente, vu que $\frac{|x-1|}{(k+1)(k+x)} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|x-1|}{k^2}$, on a la convergence normale, donc uniforme, de $\sum_{k \geq 0} j_k$ sur $]0, +\infty[$.

(d) Soit $x > 0$ fixé.

Le plus naturel est de prendre une variable réelle quelconque y à la place de la variable entière n de la question

$$\begin{aligned} \psi(x+y) - \psi(1+y) &= -\frac{1}{1+y} + \frac{1}{x+y} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+y} \right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} \right) = -\frac{1}{1+y} + \frac{1}{x+y} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x+1} - \frac{1}{k+x+y} \right) \\ &= -\frac{1}{1+y} + \frac{1}{x+y} + \sum_{k=1}^{+\infty} j_k(y). \end{aligned}$$

la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} j_k$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ et $\forall k \in \mathbb{N}^* \lim_{y \rightarrow +\infty} j_k(y) = 0$.

D'après le théorème de la double limite, $\lim_{y \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} j_k(y) = 0$ donc $\lim_{y \rightarrow +\infty} \psi(x+y) - \psi(1+y) = 0$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \psi(x+n) - \psi(1+n) = 0$.

Q8. Par analyse-synthèse :

- Analyse : Soit f solution. On va montrer que f vérifie la formule de ψ établie en Q6. c, à savoir :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

Puisque $\frac{1}{t} = f(t+1) - f(t)$ pour tout $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} (f(k+1) - f(k) - f(k+x+1) + f(k+x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n (f(k+1) - f(k)) + \sum_{k=1}^n (f(k+x) - f(k+x+1)) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (f(n+1) - \underbrace{f(1)}_{=-\gamma} + f(1+x) - f(n+x+1)) \\ &= f(x+1) + \gamma - \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x+1+n) - f(1+n))}_{=0} = f(x) + \frac{1}{x} + \gamma \end{aligned}$$

ce qui montre bien la relation voulue, et donc $f = \psi$ γ

- Synthèse : La seule solution éventuelle au problème est donc ψ . Mais on a prouvé en Q7., Q7. b et Q7. c que ψ satisfait les trois conditions voulues, donc finalement ψ est solution, et c'est la seule.

Une application de la fonction Digamma

Q9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) On suppose les boules indiscernables, ce qui implique qu'à tout moment de l'expérience, chaque boule de l'urne a la même probabilité d'être tirée, peu importe son numéro

Avec cette hypothèse, X suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$ i.e. :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, P(X = k) = \frac{1}{n}$$

$$\text{Il s'ensuit } E(X) = \sum_{k=1}^n kP(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

(b) D'après l'expérience aléatoire décrite, Y prend ses valeurs dans $\{1, \dots, n\}$. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. On utilise la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $\{(X = 1), (X = 2), \dots, (X = n)\}$:

$$P(Y = k) = \sum_{j=1}^n P_{(X=j)}(Y = k) \times P(X = j) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P_{(X=j)}(Y = k).$$

On calcule cette somme en distinguant selon les valeurs de j ($j = k$ ou $j \neq k$). En effet, pour $j = k$, le premier tirage aura amené k boules numérotées k en plus dans l'urne, tandis que pour $j \neq k$, le premier tirage n'aura pas amené de boule numérotée k supplémentaire dans l'urne. Ainsi :

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \frac{1}{n} \left(P_{(X=k)}(Y = k) + \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq k} P_{(X=j)}(Y = k) \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{k+1}{k+n} + \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq k} \frac{1}{j+n} \right), \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{k}{k+n} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+n} \right). \end{aligned}$$

Or, par Q7. b, $\psi(2n+1) - \psi(n+1) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+n}$, d'où finalement :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, P(Y = k) = \frac{1}{n} \left(\frac{k}{k+n} + \psi(2n+1) - \psi(n+1) \right)$$

(c) On a $E(Y) = \sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \left(\frac{k}{k+n} + \psi(2n+1) - \psi(n+1) \right)$, donc :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n(n+k)} + \frac{n+1}{2} (\psi(2n+1) - \psi(n+1))$$

Utilisant l'indication fournie,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1-n}{2} + n(\psi(2n+1) - \psi(n+1)) + \frac{n+1}{2} (\psi(2n+1) - \psi(n+1)) \\ &= \frac{1-n}{2} + \frac{3n+1}{2} (\psi(2n+1) - \psi(n+1)) \end{aligned}$$

REMARQUE. - Il n'était pas demandé de démontrer l'indication fournie, mais ce n'est pas très difficile :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n(n+k)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} - \frac{k}{n+k} \right) = \frac{n+1}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{n+k-n}{n+k} = \frac{n+1}{2} - \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{n}{n+k} \right) \\ &= \frac{n+1}{2} - n + n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1-n}{2} + n \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1-n}{2} + n(\psi(2n+1) - \psi(n+1)) \end{aligned}$$