

Sujet de révision 3: Séries de fonctions

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}$, et $x > 0$, on pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$. Lorsque la série converge, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

1. Montrer que la fonction S est définie sur $]0, +\infty[$. Montrer que la série de fonction $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $]0, +\infty[$. En déduire que la fonction S est continue sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que $S(1) = 1 - \frac{1}{e}$.

3. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction S (donner trois méthodes).

4. Préciser le signe de $S(x)$.

5. Ecrire un script python qui renvoie $S(\frac{1}{2})$ à 10^{-3} près.

6. Variations de S :

(a) Montrer que la fonction S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et préciser $S'(x)$.

(b) Déterminer le sens de variation de la fonction S .

(c) Montrer que S est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et préciser $S^{(k)}(x)$.

7. Equation fonctionnelle:

(a) Démontrer que pour $n \geq 1$ et $x > 0$, $xu_n(x) = u_{n-1}(x+1) + \frac{(-1)^n}{n!}$.

(b) En déduire une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$.

8. Etude aux bornes de $]0, +\infty[$.

(a) Déduire des questions 1, 2 et 7 un équivalent de la fonction S en 0.

Justifier l'existence d'un réel a tel que $S(x) = \frac{1}{x} + a + o_{x \rightarrow 0}(1)$

(b) Déterminer un équivalent de la fonction S en $+\infty$.

9. Dans cette question on fixe $x > 0$ et on pose $v_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+x}$.

(a) Montrer que la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

(b) En déduire que $\int_0^1 e^{-t} t^x dt = S(x+1)$.

Correction:

Remarque La série de fonctions de l'exercice vérifie que $x \mapsto u_0(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas bornée sur $]0; +\infty[$. Pour les convergences normales, on considérera la série $\sum_{n \geq 1} u_n, \sum_{n \geq 1} u'_n$. Les conclusions des théorèmes restent vrais.

1 On a, pour $n \geq 1$ et $x > 0$, $|u_n(x)| = \left| \frac{1}{n \times n!} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum u_n(x)$ converge donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. De plus $0 \leq \|u_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ donc $\sum \|u_n\|_\infty$ converge donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $]0, +\infty[$. Or $\forall n, u_n$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc la fonction S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

2 On a $S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$. Or $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \exp(-1) = \frac{1}{e}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e} - 1$ et donc $S(1) = 1 - \frac{1}{e}$.

3 Appliquons le théorème de la double limite: On a $\forall n, \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$ et la série de fonctions converge uniformément sur $]0, +\infty[$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$.

On aurait pu aussi écrire $|S(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+x)} \leq \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \frac{e}{x}$.

On aurait pu utiliser CSSA (voir question suivante) $|S(x)| \leq |u_0(x)| = \frac{1}{x}$.

4 On a $(-1)^n u_n(x) = \frac{1}{n!(n+x)} > 0$ donc la série $\sum u_n(x)$ est alternée. De plus $|u_n(x)| = \frac{1}{n!(n+x)} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ et comme $n < n+1$, on a $0 < n! < (n+1)!$ et $0 < n+x < (n+1)+x$ donc $0 < n!(n+x) < (n+1)!(n+1+x)$ donc en passant à l'inverse, $|u_{n+1}(x)| < |u_n(x)|$. La suite $(|u_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante. On en déduit d'après le CSSA que $S(x)$ est du signe de $u_0(x) = \frac{1}{x}$ donc $S(x) > 0$.

5 Posons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k\left(\frac{1}{2}\right)$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\left(\frac{1}{2}\right)$. D'après le CSSA, on a $|R_n| \leq \left| u_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \frac{1}{n!(n+\frac{1}{2})}$. Si $\frac{1}{n!(n+\frac{1}{2})} < 10^{-3}$, alors $|S(\frac{1}{2}) - S_n| = |R_n| \leq 10^{-3}$.

"""

i represente n+1

F represente (n+1)!

p represente (-1)**(n+1)

S represente la somme partielle

"""

i,F,S,M,p=1,1,2,2/3,-1

```

while M>10**(-3):
    S=S+p*M
    print(S)
    i=i+1
    F=F*i
    p=-p
    M=1/(F*(i+(1/2)))

```

(On peut créer une fonction auxiliaire factorielle mais cela augmente la complexité.)

6a Pour tout n , u_n est classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $u'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+x)^2}$ Montrons que la série de

fonctions $\sum u'_n$ converge normalement sur $]0, +\infty[$. On a $|u'_n(x)| = \left| \frac{1}{n^2 \times n!} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ donc $0 \leq \|u'_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ donc $\sum \|u'_n\|_\infty$ converge donc la série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement donc uniformément sur $]0, +\infty[$ donc la fonction S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+x)^2}$.

6b On montre comme en 4 que la série $\sum u'_n(x)$ vérifie le CSSA donc $S'(x)$ est du signe de $u'_0(x) = \frac{-1}{x^2}$ donc $S'(x) < 0$ donc S est décroissante.

6c $u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{n+k} k!}{n!(n+x)^{k+1}}$.

7a On a $xu_n(x) - u_{n-1}(x+1) = \frac{x(-1)^n}{n!(n+x)} - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(n-1+x+1)} = \frac{x(-1)^n - n(-1)^{n-1}}{n!(n+x)} = \frac{(-1)^n}{n!}$. donc $xu_n(x) = u_{n-1}(x+1) + \frac{(-1)^n}{n!}$.

7b On a donc $xS(x) - xu_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} xu_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(u_{n-1}(x+1) + \frac{(-1)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = S(x+1) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - 1 \right)$. D'où $xS(x) - 1 = S(x+1) + \frac{1}{e} - 1$ donc $xS(x) = S(x+1) + \frac{1}{e}$.

8a On a $xS(x) = S(x+1) + \frac{1}{e}$. La fonction S est continue en 1 donc $\lim_{x \rightarrow 0} S(x+1) = S(1) = 1 - \frac{1}{e}$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} xS(x) = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{\frac{1}{x}} = 1$ donc $S(x) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.

On peut préciser ce développement: $S(1+x) = S(1) + S'(1)x + o_{x \rightarrow 0}(x)$ donc $xS(x) = 1 + S'(1)x + o_{x \rightarrow 0}(x)$ donc $S(x) = \frac{1}{x} + S'(1) + o_{x \rightarrow 0}(1)$.

8b On a $xS(x) = S(x+1) + \frac{1}{e}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x+1) = 0$ d'après Q3 donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} xS(x) = \frac{1}{e}$ donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{\frac{1}{ex}} = 1$ donc $S(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{ex}$.

9a On pour $t \in [0, 1]$, $|v_n(t)| = \frac{1}{n!} t^{n+x} \leq \frac{1}{n!}$ et la série $\sum \frac{1}{n!}$ est convergente donc la série $\sum v_n(t)$ est absolument convergente. De plus, $0 \leq \|v_n\|_\infty \leq \frac{1}{n!}$ donc $\sum \|v_n\|_\infty$ converge donc la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.

9b On a $e^{-t} t^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!} t^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)$. Appliquons le théorème d'interversion série intégrale sur un segment:

Pour tout n la fonction v_n est continue sur $[0, 1]$ et la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$. On en déduit que $\int_0^1 e^{-t} t^x dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t) dt =$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 v_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+x} dt. \text{ Or } \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+x} dt = \left[\frac{t^{n+x+1}}{n+x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+x+1} \text{ donc}$$

$$\int_0^1 e^{-t} t^x dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+x+1)} = S(x+1).$$