
CCINP PSI 2023 Mathématiques - Correction

EXERCICE
Fonction de Bessel

Q1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \cos(x \sin(t))$ est continue sur le segment $[0, \pi]$ donc l'intégrale $\int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt$ est bien définie.

f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Q2. On définit l'application $g : \begin{cases} \mathbb{R} \times [0, \pi] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto g(x, t) = \cos(x \sin(t)) \end{cases}$

- Pour tout $t \in [0, \pi]$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\sin(t) \sin(x \sin(t)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = -\sin^2(t) \cos(x \sin(t)).$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les applications $t \mapsto g(x, t)$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t)$ sont continues par morceaux sur $[0, \pi]$ (segment) donc intégrables sur $[0, \pi]$.

- **Hypothèse de domination :** pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$, on a :

$$\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = \left| \sin^2(t) \cos(x \sin(t)) \right| \leq 1 = \varphi(t)$$

et la fonction constante $\varphi = 1$ est intégrable sur $[0, \pi]$.

- **Conclusion :** Par le théorème de dérivations successives pour les intégrales à paramètre, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = - \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt \quad \text{et} \quad f''(x) = - \int_0^\pi \sin^2(t) \cos(x \sin(t)) dt.$$

Q3. Soit $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto h(x, t) = \cos(t) \sin(x \sin(t)) \end{cases}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application partielle $t \mapsto h(x, t) = \cos(t) \sin(x \sin(t))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions dérivables), donc l'application $\frac{\partial h}{\partial t}$ est bien définie sur $\mathbb{R}^2$.

Et par la formule de dérivation d'un produit, on a :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = -\sin(t) \sin(x \sin(t)) + x \cos^2(t) \cos(x \sin(t)).$$

Q4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 x f''(x) + f'(x) + x f(x) &= \int_0^\pi \left(-x \sin^2(t) \cos(x \sin(t)) - \sin(t) \sin(x \sin(t)) + x \cos(x \sin(t)) \right) dt \\
 &= \int_0^\pi \left(x(1 - \sin^2(t)) \cos(x \sin(t)) - \sin(t) \sin(x \sin(t)) \right) dt \\
 &= \int_0^\pi \left(x(\cos^2(t)) \cos(x \sin(t)) - \sin(t) \sin(x \sin(t)) \right) dt \\
 &= \int_0^\pi \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) dt = \left[h(x, t) \right]_{t=0}^{t=\pi} = \left[\cos(t) \sin(x \sin(t)) \right]_{t=0}^{t=\pi} = 0
 \end{aligned}$$

Q5. On note $y : x \in]-R, R[\longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (avec $R > 0$ par hypothèse).

En tant que série entière, y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et on peut dériver terme à terme sur $] -R, R[$, le rayon de convergence est conservé.

$$\begin{aligned}
 \forall x \in]-R, R[, \quad y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
 y'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\
 y''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}
 \end{aligned}$$

On suppose que y est solution de **(E)** (sur $] -R, R[$) on a **donc** l'égalité suivante (le raisonnement par équivalence n'est pas nécessaire ici) :

$\forall x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned}
 x y''(x) + y'(x) + x y(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\
 &= \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n x^{n-1}}_{p=n-1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}}_{p=n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1)^2 a_{p+1} x^p + \sum_{p=1}^{+\infty} a_{p-1} x^p \\
 &= a_1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \left((p+1)^2 a_{p+1} + a_{p-1} \right) x^p = 0
 \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière sur un voisinage de 0, tous les coefficients de cette série entière sont nuls c'est-à-dire : $a_1 = 0$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*, (p+1)^2 a_{p+1} + a_{p-1} = 0$.

En posant $n = p+1 \geq 2$, $a_1 = 0$ et pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$.

Q6. On sait que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\cos(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$ (série entière de référence).

En particulier, avec $\theta = x \sin(t)$, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\cos(x \sin(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n}$$

Dans ce qui suit, x est un réel fixé.

On définit alors $\mu_n(t) = (-1)^n \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n}$ pour tout $t \in [0, \pi]$.

Par construction des fonctions μ_n , la série de fonctions $\sum \mu_n$ converge simplement sur $[0, \pi]$ et a pour somme $S : t \in [0, \pi] \mapsto \cos(x \sin(t))$.

On montre que $\sum \mu_n$ converge normalement sur ce segment.

$$\forall t \in [0, \pi], \quad |\mu_n(t)| = \frac{|\sin^{2n}(t)|}{(2n)!} |x|^{2n} \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}.$$

Et donc $\|\mu_n\|_{\infty, [0, \pi]} = \sup_{t \in [0, \pi]} |\mu_n(t)| \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Or $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge (et a pour somme $\cosh(x)$), donc par comparaison, $\sum \|\mu_n\|_{\infty, [0, \pi]}$ converge aussi.

Ainsi $\sum \mu_n$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0, \pi]$. Comme les fonctions μ_n sont continues sur $[0, \pi]$, le théorème de convergence uniforme permet d'écrire :

$$\int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi \mu_n(t) dt$$

ou encore : $f(x) = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^\pi \sin^{2n}(t) dt$.

On a donc démontré, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{W_n}{(2n)!} x^{2n}.$$

En particulier f est bien développable en série entière ($R = +\infty$).

Q7. Tout d'abord, f est bien une solution de **(E)** sur $\mathbb{R}$ (**Q4**), elle est bien développable en série entière (**Q6**) et elle vérifie $f(0) = \int_0^\pi \cos(0) dt = \pi$.

On remarque aussi que tous les coefficients d'indice impairs du développement en série entière de f sont nuls, que $a_0 = f(0) = \pi$ et que (d'après **(Q5)**) ceux d'indices pairs vérifient : si $n \geq 1$, $a_{2n} = -\frac{a_{2(n-1)}}{(2n)^2}$.

Maintenant, si $\tilde{f}$ est une solution de **(E)** sur $] -R, R[$, développable en série entière et si elle vérifie $\tilde{f}(0) = \pi$, alors, d'après **(Q5)**, $\tilde{a}_1 = 0$ et pour tout entier $n \geq 2$, $\tilde{a}_n = -\frac{\tilde{a}_{2n-2}}{(2n)^2}$.

Par une récurrence immédiate, on montrerait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{a}_{2n+1} = 0 = a_{2n+1}$.

De plus $\tilde{a}_0 = \tilde{f}(0) = \pi$ et si $n \geq 1$, $\tilde{a}_{2n} = -\frac{\tilde{a}_{2(n-1)}}{(2n)^2}$. Par une récurrence immédiate, on montrerait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{a}_{2n} = a_{2n}$.

Et finalement, $\tilde{f} = f$ (et $R = +\infty$).

On a donc démontré que :

f est la seule solution de **(E)** développable en série entière et vérifiant $f(0) = \pi$.

Q8. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n W_n}{(2n)!} x^{2n}$

Or $a_{2n} = -\frac{1}{(2n)^2} a_{2(n-1)} = (-1)^2 \frac{1}{(2n)^2 (2n-2)^2} a_{2(n-2)} = \dots = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} a_0 = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} \pi$.

Par unicité du développement en série entière, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} \pi = \frac{(-1)^n W_n}{(2n)!}$. Et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \pi = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

PROBLÈME 1

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Partie I - Un développement en série entière

Q9. C'est une série entière de référence. Puisque $\alpha \notin \mathbb{N}$, son rayon de convergence est $R = 1$.

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1) \frac{x^n}{n!}.$$

Q10. Si $x \in]-1, 1[$ alors $-x \in]-1, 1[$ et d'après la question **(Q9)** avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, on a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= (1-x)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{1+2n-2}{2}\right) \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{(2n)!}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n \end{aligned}$$

Partie II - Probabilité de retour à l'origine

Q11. Tout d'abord $X_t(\Omega) = \{-1, 1\}$ donc $\left(\frac{X_t+1}{2}\right)(\Omega) = \{0, 1\}$ et :

$$P\left(\frac{X_t+1}{2} = 1\right) = P(X_t = 1) = p \quad \text{et} \quad P\left(\frac{X_t+1}{2} = 0\right) = P(X_t = -1) = 1 - p.$$

Donc $\boxed{\frac{X_t+1}{2} \sim \mathcal{B}(p)}.$

Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes donc par le lemme des coalitions, les variables aléatoires $\frac{X_1+1}{2}, \dots, \frac{X_n+1}{2}$ sont aussi indépendantes. Comme elles suivent toutes une même loi de

Bernoulli de paramètre p , leur somme $Y_n = \sum_{t=1}^n \frac{X_t+1}{2}$ suit une loi binomiale de paramètres n et p .

$$\boxed{Y_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(Y_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Q12. Avec les notations de l'énoncé, on a $Y_n = \sum_{t=1}^n \frac{X_t+1}{2} = \frac{1}{2}(S_n + n)$.

Et donc l'événement $(S_n = 0)$ est aussi l'événement $\left(Y_n = \frac{n}{2}\right)$.

Comme $Y_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, si n est impair, $P(S_n = 0) = 0$.

Si n est pair, alors $P(S_n = 0) = P\left(Y_n = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{n/2} p^{n/2} (1-p)^{n-n/2}$.

On a bien $\boxed{u_n = P(S_n = 0) = \begin{cases} \binom{n}{n/2} (p(1-p))^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

Q13. On a $u_{2n} = \binom{2n}{n} (p(1-p))^n$.

On voudrait utiliser le résultat de (**Q10**) avec $\frac{x^n}{2^{2n}} = (p(1-p))^n$, c'est-à-dire avec $x = 4p(1-p)$.

Or l'application $x \in [0, 1] \mapsto x(1-x)$ prend ses valeurs dans $[0, 1/4]$ et atteint son maximum $\frac{1}{4}$ uniquement en $x = \frac{1}{2}$. On distingue deux cas.

- si $p \neq \frac{1}{2}$: alors $x = 4p(1-p) \in]0, 1[$ et donc la série $\sum u_{2n} = \sum \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n$ converge. Par conséquent, son terme général tend vers 0.
- si $p = \frac{1}{2}$: par la formule de Stirling, on a :

$$u_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4n\pi}}{2^{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2n\pi} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- Remarque : dans les deux cas, on a

$$u_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n\pi}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dans tous les cas, on a bien démontré, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 0.}$

Ce qui signifie que la probabilité de retour à l'origine au bout de $2n$ déplacements tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Partie III - Nombre de passages par l'origine

Q14. T_n représente le nombre de passage à l'origine au cours de $2n$ déplacements.

Q15. $O_{2j}(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $P(O_{2j} = 1) = P(S_{2j} = 0) = u_{2j}$ donc $\boxed{O_{2j} \sim \mathcal{B}(u_{2j}).}$

De plus , par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^n O_{2j}\right) = \sum_{j=0}^n \mathbb{E}(O_{2j}) = \sum_{j=0}^n u_{2j}$$

On a donc bien $\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^n \binom{2j}{j} (p(1-p))^j.}$

Q16. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$.

On a alors $4p(1-p) \in]0, 1[$ et en appliquant le résultat de (**Q10**) à $x = 4p(1-p)$, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} (4p(1-p))^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} (p(1-p))^n$$

ce qui signifie par définition de série convergente que :

$$\boxed{\text{Si } p \neq \frac{1}{2} \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^n \binom{2j}{j} (p(1-p))^j = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}.}$$

Q17. On suppose que $p = \frac{1}{2}$. On montre le résultat attendu par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$: $T_0 = O_0 = 1$ car à l'instant $t = 0$, la particule est à l'origine. Donc $\mathbb{E}(T_0) = \mathbb{E}(1) = 1$.

De plus, pour $n = 0$, $\frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = 1$, le résultat est donc vérifié pour $n = 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose le résultat démontré pour ce n . On a $T_{n+1} = T_n + O_{2n+2}$.

Par linéarité de l'espérance et par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_{n+1}) &= \mathbb{E}(T_n) + \mathbb{E}(O_{2n+2}) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \\ &= \frac{1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \left((2n+1)2^2 \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} (2(n+1) + 1) = \frac{2n+3}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \end{aligned}$$

- Finalement, par le principe de récurrence, on a démontré : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$

Méthode 1 : On utilise comme cela est suggéré le résultat précédent.

On a vu en (Q13) que dans ce cas, $u_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$

On a donc $\mathbb{E}(T_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n}{\sqrt{n\pi}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et alors $\mathbb{E}(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$

Méthode 2 : sans l'expression de l'espérance

On a vu en (Q13) que dans ce cas, $u_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$

Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, donc par comparaison (les termes sont positifs), la série $\sum u_{2n}$ diverge. Or, ses sommes partielles sont croissantes (termes positifs), comme elles divergent, elles divergent vers $+\infty$, ce qui s'écrit :

$$\text{Si } p = \frac{1}{2} \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^n \binom{2j}{j} (p(1-p))^j = +\infty.$$

PROBLÈME 2

Puissances de matrices et limites de suites de matrices

Partie I - Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

- Q18.** Lorsque a et b sont réels, la matrice $M(a, b)$ est symétrique réelle, donc, par le théorème spectral, elle est diagonalisable.
- Q19.** Le calcul matriciel donne $M(a, b)V = (b + (n-1)a)V$. Et comme V n'est pas le vecteur nul, par définition :

$$V \text{ est un vecteur propre de } M(a, b) \text{ associé à la valeur propre } b + (n-1)a.$$

- Q20.** $M(1, 0)$ est unitaire et de degré n donc il est complètement défini si l'on connaît ses racines (complexes) et leurs multiplicités respectives.

- On remarque que la matrice $M(1, 0) + I_n$ est de rang $1 < n$ (tous les coefficients sont égaux à 1 et donc $\text{Im}(M(1, 0) + I_n) = \text{Vect}\{V\}$).

Par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(M(1, 0) + I_n)) = n - 1 > 0$, ainsi, -1 est valeur propre de $M(1, 0)$ et sa multiplicité m_{-1} est au moins égale à $n - 1$.

- Par la question précédente, $b + (n-1)a = n - 1$ est aussi valeur propre de $M_{0,1}$ et elle est distincte de -1 car $n > 0$. Comme la somme des multiplicité de valeurs propres de $M(1, 0)$ est égale à n , celle de $n - 1$ ne peut excéder 1, elle est donc égale à 1 et il n'y a pas d'autre valeur propre.

$$P_{1,0}(X) = (X - (n-1))^{m_{n-1}}(X + 1)^{m_{-1}} = (X - (n-1))(X + 1)^{n-1}.$$

Q21. On suppose que $a \neq 0$. Par définition du polynôme caractéristique, et par propriétés du déterminant, on a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} P_{a,b}(X) &= \det(XI_n - M(a,b)) = \det(XI_n - bI_n - aM(1,0)) = \det\left(a\left(\frac{X-b}{a}I_n - M(1,0)\right)\right) \\ &= a^n \det\left(\frac{X-b}{a}I_n - M(1,0)\right) \end{aligned}$$

Et donc $\boxed{P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\frac{X-b}{a}\right)}.$

Le résultat de la question précédente donne alors :

$$P_{a,b}(X) = a^n \left(\frac{X-b}{a} - (n-1)\right) \left(\frac{X-b}{a} + 1\right)^{n-1} = (X - (b + a(n-1))) (X - (b-a))^{n-1}.$$

De plus, $b-a = (b + (n-1)a) \iff na = 0 \iff a = 0$ (car $n > 0$), on distingue donc deux cas :

- Si $a \neq 0$: $\text{Sp}(M(a,b)) = \{b-a, (b + (n-1)a)\}$ avec $m_{b+a(n-1)} = 1$ et $m_{b-a} = n-1$.
- Si $a = 0$: $\text{Sp}(M(0,b)) = \{b\}$ avec $m_b = n$.

Q22. On définit $Q_{a,b}(X) = (X - (b-a))(X - (b + (n-1)a))$.

La matrice $M(a,b) - (b-a)I_n$ est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à b donc son image est contenue dans $\text{Vect}\{V\}$. De plus, d'après la question (**Q19**), on a :

$$\text{Vect}\{V\} \subset E_{(b+(n-1)a)}(M(a,b)) = \text{Ker}(M(a,b) - (b + (n-1)a)I_n).$$

On a donc

$$\text{Im}(M(a,b) - (b-a)I_n) \subset \text{Ker}(M(a,b) - (b + (n-1)a)I_n)$$

Et par conséquent $(M(a,b) - (b-a)I_n)(M(a,b) - (b + (n-1)a)I_n) = Q_{a,b}(M(a,b)) = 0$.

$$\boxed{Q_{a,b} \text{ est un polynôme annulateur de } M(a,b).}$$

Remarque :

on peut aussi calculer directement. En notant J la matrice dont tous les coefficients valent 1, on a :

$$\begin{aligned} Q_{a,b}(M(a,b)) &= (M(a,b) - (b-a)I_n) \times (M(a,b) - (b + (n-1)a)I_n) \\ &= (a(M(1,0) + I_n)) \times (a(M(1,0) - (n-1)I_n)) \\ &= a^2 J \times (M(1,0) - (n-1)I_n) \\ &= a^2 (JM(1,0) - (n-1)J) = 0 \end{aligned}$$

De plus, $b-a = (b + (n-1)a) \iff na = 0 \iff a = 0$ (car $n > 0$), comme précédemment, on distingue donc deux cas :

- Si $a \neq 0$: $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$ et il est scindé à racines simples donc $M(a,b)$ est diagonalisable.
- Si $a = 0$: alors $M(a,b) = bI_n$ est diagonale, a fortiori diagonalisable.

On a donc démontré : $\boxed{\text{Pour tout } (a,b) \in \mathbb{C}^2, \text{ la matrice } M(a,b) \text{ est diagonalisable.}}$

Q23. On suppose que $a \neq 0$. Le polynôme $Q_{a,b}$ n'est pas le polynôme nul, on peut donc effectuer la division euclidienne de X^k par $Q_{a,b}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\exists! P_k \in \mathbb{C}[X], \exists! R_k \in \mathbb{C}[X], \quad X^k = P_k(X)Q_{a,b}(X) + R_k(X) \quad \text{et} \quad \deg(R_k) < \deg(Q_k) = 2.$$

Ainsi, il existe des complexes α_k et β_k tels que : $R_k(X) = \alpha_k X + \beta_k$.

On évalue cette égalité polynomiale aux racines (distinctes) de $Q_{a,b}$. On obtient :

$$\begin{aligned} (b-a)^k &= \alpha_k(b-a) + \beta_k, \\ (b+(n-1)a)^k &= \alpha_k(b+(n-1)a) + \beta_k. \end{aligned}$$

Puisque $a \neq 0$, ce système a une unique solution (α_k, β_k) . Après calculs, on trouve :

$$\alpha_k = \frac{1}{na} \left((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k \right) \quad \text{et} \quad \beta_k = \frac{1}{na} \left((b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a) \right).$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de X^k par $Q_{a,b}(X)$ est :

$$R_k(X) = \frac{1}{na} \left(((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k) X + ((b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a)) \right).$$

Puisque $X^k = P_k(X)Q_{a,b}(X) + R_k(X)$ on a :

$$M(a,b)^k = P_k(M(a,b))Q_{a,b}(M(a,b)) + R_k(M(a,b)) = R_k(M(a,b)) \quad \text{car} \quad Q_{a,b}(M(a,b)) = 0$$

Et donc :

$$M(a,b)^k = \frac{1}{na} \left(((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k) M(a,b) + ((b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a)) I_n \right)$$

Q24. Si $|b-a| < 1$ et si $|(b+(n-1)a)| < 1$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} (b-a)^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} (b+(n-1)a)^k = 0$ et donc :

$$\begin{aligned} \|((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k) M(a,b)\| &= |(b+(n-1)a)^k - (b-a)^k| \|M(a,b)\| \\ &\leq (|b+(n-1)a|^k + |b-a|^k) \|M(a,b)\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Donc par encadrement, $\lim_{k \rightarrow +\infty} ((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k) M(a,b) = 0$.

De même, on montrerait que $\lim_{k \rightarrow +\infty} ((b-a)^k(b+(n-1)a) - (b+(n-1)a)^k(b-a)) I_n = 0$.

Et par opérations sur les limites : Si $|b-a| < 1$ et si $|(b+(n-1)a)| < 1$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} M(a,b)^k = 0$.

Partie II - Limite des puissances d'une matrice

Q25. T est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, sa première colonne donne l'image de e_1 : $u(e_1) = \lambda_1 e_1$.

Par une récurrence immédiate, on montrerait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(e_1) = \lambda_1^k e_1$. Et puisque $|\lambda_1| < 1$, on a :

$$\|u^k(e_1)\| = \|\lambda_1^k e_1\| = |\lambda_1|^k \|e_1\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Et de manière immédiate $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_1) = 0$.

Q26. La $i + 1$ -ème colonne de T donne l'image de e_{i+1} par u . Plus précisément :

$$u(e_{i+1}) = \underbrace{T_{1,i+1}e_1 + \cdots + T_{i,i+1}e_i}_{=x} + \lambda_{i+1}e_{i+1}.$$

On a bien trouvé $x \in \text{Vect}\{e_1, \dots, e_i\}$ tel que $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x$.

On pourrait démontrer le résultat demandé par récurrence. On choisit ici de faire apparaître une série télescopique.

• si $\lambda_{i+1} \neq 0$: on a $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x$ et comme u^m est linéaire :

$$\forall m \in \mathbb{N}, u^{m+1}(e_{i+1}) - \lambda_{i+1}u^m(e_{i+1}) = u^m(x).$$

On divise par $\lambda_{i+1}^{m+1} \neq 0$: $\frac{u^{m+1}(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^{m+1}} - \frac{u^m(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^m} = \frac{u^m(x)}{\lambda_{i+1}^{m+1}}$. On ajoute ces égalités pour $m = 0, \dots, k-1$.

La somme est télescopique, il reste :

$$\frac{u^k(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^k} - \frac{u^0(e_{i+1})}{\lambda_{i+1}^0} = \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{-m-1} u^m(x).$$

En multipliant par λ_{i+1}^k , on obtient le résultat demandé.

• si $\lambda_{i+1} = 0$: alors d'une part, $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x = x$ donc $u^k(e_{i+1}) = u^{k-1}(x)$.

Et d'autre part, dans la somme suivante, tous les termes sont nuls sauf un, celui pour $m = k-1$:

$$\sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) = u^{k-1}(x) = u^k(e_{i+1}).$$

Dans les deux cas, on a bien démontré que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u^k(e_{i+1}) = \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x).$$

Q27. On a $x \in \text{Vect}\{e_1, \dots, e_i\}$ donc il existe des complexes $x_1, \dots, x_i$ tels que $x = \sum_{j=1}^i x_j e_j$.

Par linéarité de u , $u^k(x) = \sum_{j=1}^i x_j u^k(e_j)$. On a supposé que pour tout $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_j) = O$.

Par opérations sur les limites, on a donc aussi :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(x) = O.$$

Une première conséquence est que la suite $(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée : $\exists M > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \|u^k(x)\| \leq M$.

On montre le résultat demandé en revenant à la définition de limite.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé : on a les majorations suivantes (inégalité triangulaire).

$$\left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leq \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\|.$$

Or, $\lim_{m \rightarrow +\infty} u^m(x) = 0$ donc, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall k \geq N, \|u^m(x)\| \leq \varepsilon.$$

Pour $k > N$, on coupe la somme en 2. On sait que $|\lambda_{i+1}| < 1$ donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_{i+1}|^n$ converge et a

pour somme $\frac{1}{1 - |\lambda_{i+1}|}$.

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| &= \sum_{m=0}^{N-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \underbrace{\|u^m(x)\|}_{\leq M} + \sum_{m=N}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \underbrace{\|u^m(x)\|}_{\leq \varepsilon} \\ &\leq M \sum_{m=0}^{N-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} + \varepsilon \sum_{m=N}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \\ &\leq M \sum_{n=k-N}^{+\infty} |\lambda_{i+1}|^n + \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_{i+1}|^n \\ &\leq \frac{M}{1 - |\lambda_{i+1}|} |\lambda_{i+1}|^{k-N} + \varepsilon \frac{1}{1 - |\lambda_{i+1}|} \end{aligned}$$

Or $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_{i+1}|^{k-N} = 0$ donc il existe $N' \geq N$ tel que pour tout $k \geq N'$, on ait $|\lambda_{i+1}|^{k-N} \leq \varepsilon$.

En reportant dans la majoration précédente, on a trouvé N' tel que pour tout entier $k \geq N'$, on ait :

$$\left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leq \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| \leq \varepsilon \frac{M+1}{1 - |\lambda_{i+1}|} = C\varepsilon.$$

Quitte à reprendre le raisonnement avec $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{C}$, on a bien démontré que :

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0.}$$

On a alors, en utilisant (Q26) et $|\lambda_{i+1}| < 1$:

$$\|u^k(e_{i+1})\| = \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leq |\lambda_{i+1}|^k \|e_{i+1}\| + \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

et par le théorème d'encadrement $\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_{i+1}) = 0.}$

Q28. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ on note $\mathcal{P}_i$ la propriété : $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_i) = 0$.

En question (Q25), on a montré que $\mathcal{P}_1$ est vraie. Dans les deux questions suivantes, on a montré que, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$ si $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_i$ sont vraies, alors $\mathcal{P}_{i+1}$ est vraie.

Par le principe de **récence forte**, $\mathcal{P}_i$ est vraie pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

On note comme dans l'énoncé, $T_{i,j}^{(k)}$ les coefficients de T^k . Puisque T^k est la matrice de u^k dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, u^k(e_j) = \sum_{i=1}^n T_{i,j}^{(k)} e_i$$

Et comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_i) = 0$, ses suites coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ tendent aussi vers 0.

Et finalement :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \lim_{k \rightarrow +\infty} T_{i,j}^{(k)} = 0.$$

Et par conséquent, $\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} T^k = 0.}$

Q29. On suppose juste que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que : $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), |\lambda| < 1$.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A répétées avec multiplicité. Puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de A est scindé et donc A est trigonalisable. Plus précisément, il existe une matrice triangulaire supérieure T dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, et une matrice inversible P telles que :

$$A = PTP^{-1}.$$

- D'après les questions précédentes, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^k = 0$.
- De plus, $A^k = (PTP^{-1})^k = PTP^{-1} \cdot PTP^{-1} \dots PTP^{-1} = PT^k P^{-1}$.
- Enfin, l'application $\varphi : M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, elle est continue, en particulier continue en 0. Puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^k = 0$, on a donc :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(T^k) = \varphi(0) = 0.$$

Ce qui s'écrit $\boxed{\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0.}$

Partie III - Application à la méthode de Gauss-Seidel

Q30. Remarquons tout d'abord que puisque A est une matrice à diagonale strictement dominante et puisqu'un module est un réel positif ou nul, on a, grâce à l'inégalité stricte : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{ii}| > 0$. M est une matrice triangulaire inférieure donc

$$|\det(M)| = \prod_{i=1}^n |m_{ii}| = \prod_{i=1}^n |a_{ii}| > 0$$

Ainsi $\det(M) \neq 0$ et $\boxed{M \text{ est inversible.}}$

Q31. Avec les notations de l'énoncé :

$$BX + M^{-1}Y = M^{-1}FX + M^{-1}AX = M^{-1}(F + A)X = M^{-1}MX = X$$

Q32. Par définition de λ et V , $V \neq 0$ et $BV = \lambda V$.

Donc $M^{-1}FV = \lambda V$ et en multipliant par M à gauche, $\boxed{FV = \lambda MV}$.

L'énoncé ne le dit pas mais il est clair que $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

En utilisant les définitions de M et F et la convention de l'énoncé, l'égalité vectorielle précédente se traduit alors par

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}v_j = \lambda \left(\sum_{j=1}^i a_{ij}v_j \right)$$

En isolant le terme a_{ii} , on obtient donc

$$\boxed{\lambda a_{ii}v_i = - \left(\sum_{j=i+1}^n a_{ij}v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}v_j \right)}$$

Q33. $\{|v_j| \mid j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ est un ensemble fini de réels donc admet un maximum $|v_{i_0}|$. Comme V est un vecteur non nul, il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $v_j \neq 0$ et donc $|v_{i_0}| \geq |v_j| > 0$. Ainsi $v_{i_0} \neq 0$. Utilisons l'égalité de **Q32.** pour $i = i_0$ et appliquons l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda a_{i_0 i_0} v_{i_0}| \leq \left| \sum_{j=i_0+1}^n a_{i_0 j} v_j \right| + |\lambda| \left| \sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0 j} v_j \right|$$

$$|\lambda a_{i_0 i_0}| |v_{i_0}| \leq \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}| |v_j| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0 j}| |v_j|$$

$|v_{i_0}| > 0$ donc

$$|\lambda a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}| \frac{|v_j|}{|v_{i_0}|} + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0 j}| \frac{|v_j|}{|v_{i_0}|}$$

Par définition de i_0 , $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{|v_j|}{|v_{i_0}|} \leq 1$ et on manipule des termes positifs donc

$$\boxed{|\lambda a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0 j}|}$$

Q34. Si $\lambda = 0$, on a bien $|\lambda| < 1$.

Sinon, A étant une matrice à diagonale strictement dominante, on a :

$$|\lambda| |a_{i_0 i_0}| > |\lambda| \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| = |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0 j}| + |\lambda| \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}|$$

Q33. permet de déduire :

$$\sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}| > |\lambda| \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}|$$

Et $\sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0 j}| > 0$ car sinon, on aurait $0 > 0$ donc en simplifiant, on obtient

$$\boxed{|\lambda| < 1}$$

Les valeurs propres de B sont donc toutes de module strictement inférieur à 1.
Par conséquent la **partie II** permet de conclure que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0.$$

Q35. Montrons le résultat par récurrence. On note pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_k : X_k - X = B^k(X_0 - X)$.

- Initialisation : $\mathcal{H}_0$ est clairement vraie.
- Hérédité : Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie à un rang fixé k et montrons que $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
Par définition de la suite et par **Q31.**, on a :

$$X_{k+1} - X = (BX_k + M^{-1}Y) - (BX + M^{-1}Y) = B(X_k - X)$$

Donc par HR_k , $X_{k+1} - X = B^{k+1}(X_0 - X)$ et $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- Conclusion : On a montré par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_k - X = B^k(X_0 - X)$$

De plus, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie et l'application $\psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto M(X_0 - X)$ est linéaire donc elle est continue (en 0). Comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0$, on en déduit que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \psi(B^k) = \psi(0) = 0$.

Ainsi :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (X^k - X) = 0.$$

La suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge donc bien vers X .