

# CONCOURS COMMUN INP 2023

Épreuve de mathématiques, PSI, quatre heures

## EXERCICE Fonction de Bessel

Soit une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note :

$$W_n = \int_0^\pi (\sin(t))^{2n} dt.$$

**Q 1.** Montrer que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

**Q 2.** Montrer que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et donner des expressions sous forme d'intégrales de  $f'(x)$  et  $f''(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Q 3.** Soit une fonction  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x, t) = \cos(t) \sin(x \sin(t)).$$

Justifier l'existence de  $\frac{\partial h}{\partial t}$ , puis déterminer  $\frac{\partial h}{\partial t}(x, t)$  pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ .

**Q 4.** En déduire que  $f$  est solution de l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0. \quad (E)$$

**Q 5.** On suppose qu'il existe une solution de (E) développable en série entière notée  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  de rayon de convergence  $R > 0$ .

Montrer que  $a_1 = 0$  et que pour tout entier  $n \geq 2$  :

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}.$$

**Q 6.** En utilisant un théorème d'interversion série-intégrale, montrer que  $f$  est développable en série entière au voisinage de 0 et exprimer les coefficients du développement de  $f$  en fonction des termes de la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Q 7.** Déduire des questions précédentes que  $f$  est l'unique solution développable en série entière de (E) vérifiant  $f(0) = \pi$ .

**Q 8.** En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une expression de  $W_n$  en fonction de  $n$ .

## PROBLÈME 1 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On considère une particule se déplaçant sur une droite graduée par les entiers relatifs. Sa position à l'instant initial  $t = 0$  est  $k = 0$ . À chaque instant  $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , elle se déplace aléatoirement de sa position  $k \in \mathbb{Z}$  à la position  $k + 1$  ou  $k - 1$ .

Soit  $p \in ]0, 1[$ . On définit sur un espace probabilisé  $(\Omega, \Sigma, P)$  une suite de variables aléatoires indépendantes  $(X_t)_{t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  et identiquement distribuées dont la loi est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad P(X_t = 1) = p, \quad \text{et} : \quad P(X_t = -1) = 1 - p.$$

Enfin, pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , on pose :  $S_n = \sum_{t=1}^n X_t$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , la variable aléatoire  $X_t$  modélise le déplacement de la particule à l'instant  $t$ . Si  $X_t = 1$ , la particule se déplace vers la droite. Si  $X_t = -1$ , la particule se déplace vers la gauche. Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $S_n$  modélise la position de la particule après  $n$  déplacements.

On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

### Partie I – Un développement en série entière

**Q 9.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha \notin \mathbb{N}$ . Donner sans démonstration un développement en série entière de la fonction réelle  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  au voisinage de 0 en précisant son rayon de convergence.

**Q 10.** En déduire que pour tout  $x \in ]-1, 1[$  :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n.$$

### Partie II – Probabilité de retour à l'origine

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = P(S_n = 0).$$

**Q 11.** Pour tout  $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , déterminer la loi de la variable aléatoire  $\frac{X_t + 1}{2}$ . En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , la variable aléatoire  $\sum_{t=1}^n \frac{X_t + 1}{2}$  suit la loi binomiale dont on précisera les paramètres.

**Q 12.** En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  :

$$u_n = \begin{cases} \binom{n}{n/2} (p(1-p))^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Q 13.** Déterminer la limite de la suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  selon les valeurs de  $p$  et interpréter le résultat.

### Partie III – Nombre de passages par l'origine

Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , on note  $O_{2j}$  la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant  $t = 2j$ , et 0 sinon. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $T_n = \sum_{j=0}^n O_{2j}$ . On note  $E(T_n)$  l'espérance de la variable aléatoire  $T_n$ .

Dans cette partie, on souhaite déterminer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n)$ .

**Q 14.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Que modélise la variable aléatoire  $T_n$  ?

**Q 15.** Soit  $j \in \mathbb{N}$ . Déterminer la loi de la variable aléatoire  $O_{2j}$ . En déduire que :

$$E(T_n) = \sum_{j=0}^n \binom{2j}{j} (p(1-p))^j.$$

**Q 16.** On suppose dans cette question que  $p \neq \frac{1}{2}$ . En utilisant le résultat de la **Q 10**, calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n)$ , et interpréter le résultat.

**Q 17.** On suppose dans cette question que  $p = \frac{1}{2}$ . Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

et en déduire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n)$ .

## PROBLÈME 2

### Puissances de matrices et limites de suites de matrices

Soit  $(n, p) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$ . On s'intéresse ici à la convergence de suites matricielles  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  où pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a :  $M_k \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ , avec  $p = 1$  (matrices colonnes) ou  $p = n$  (matrices carrées). Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note alors  $M_k = \left( (m_{i,j}^{(k)}) \right)_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket \times \llbracket 1,p \rrbracket}$  ou plus simplement  $M_k = \left( (m_{i,j}^{(k)}) \right)$ .

On suppose que l'espace vectoriel  $M_{n,p}(\mathbb{C})$  est muni d'une norme notée  $\|\cdot\|$  indifféremment des valeurs de  $n$  et  $p$ . En particulier, si  $V \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ ,  $V$  est une matrice colonne assimilée à un vecteur de  $\mathbb{C}^n$  et on note  $\|V\|$  sa norme.

On rappelle que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. La suite  $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice  $A = ((a_{i,j}))$ .
2. La suite des normes  $(\|M_k - A\|)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.
3. Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ , la suite de nombres complexes  $(m_{i,j}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $a_{i,j} \in \mathbb{C}$  (convergence des coefficients de la matrice).

On s'intéresse en particulier à la suite des puissances itérées  $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'une matrice donnée  $M \in M_n(\mathbb{C})$ .

### Partie I – Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 3$ . Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ , on définit la matrice  $M(a, b) \in M_n(\mathbb{C})$  par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}$$

et on note  $P_{a,b}$  le polynôme caractéristique de la matrice  $M(a, b)$ .

On note  $I_n$  la matrice identité de  $M_n(\mathbb{C})$  et on remarque que pour tous réels  $a$  et  $b$ ,

$$M(a, b) = bI_n + aM(1, 0).$$

**Q 18.** On suppose, dans cette question uniquement, que  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que dans ce cas  $M(a, b)$  est diagonalisable.

**Q 19.** Montrer que  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$  est un vecteur propre de  $M(a, b)$  et déterminer la valeur propre associée à  $V$ .

**Q 20.** Montrer que :  $P_{1,0}(X) = (X - (n - 1))(X + 1)^{n-1}$ .

**Q 21.** On suppose que  $a \neq 0$ . Montrer que :  $P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\frac{X-b}{a}\right)$ . En déduire l'ensemble des valeurs propres de  $M(a, b)$  ainsi que leurs multiplicités.

- Q 22.** On définit le polynôme  $Q_{a,b} \in \mathbb{C}[X]$  par :  $Q_{a,b}(X) = (X - (b - a))(X - (b + (n - 1)a))$ .  
Montrer que  $Q_{a,b}$  est un polynôme annulateur de  $M(a, b)$  et en déduire que  $M(a, b)$  est diagonalisable (on distinguera les cas  $a = 0$  et  $a \neq 0$ ).
- Q 23.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $a \neq 0$ . Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme  $X^k$  par le polynôme  $Q_{a,b}$  et en déduire une expression de  $M(a, b)^k$  comme combinaison linéaire de  $M(a, b)$  et de  $I_n$ .
- Q 24.** Supposons que  $|b - a| < 1$  et  $|b + (n - 1)a| < 1$ . Déterminer la limite de la suite de matrices  $(M(a, b)^k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

## Partie II – Limite des puissances d'une matrice

Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . On considère l'espace vectoriel  $\mathbb{C}^n$  muni d'une norme notée  $\|\cdot\|$ . On note sa base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \quad |\lambda| < 1$$

où  $\text{Sp}(u)$  est l'ensemble des valeurs propres de  $u$ . On note  $A$  la matrice de l'endomorphisme  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

L'objectif de cette partie est de montrer que :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0_{M_n(\mathbb{C})}$ .

On suppose (sauf à la question **Q 29**) que  $A = T$  où  $T$  est une matrice triangulaire supérieure :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

- Q 25.** Montrer que :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u^k(e_1)\| = 0$  et en déduire :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_1) = 0_{\mathbb{C}^n}$ .

On suppose qu'il existe  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  tel que pour tout  $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$ , on ait :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_j) = 0_{\mathbb{C}^n}$ .

- Q 26.** Montrer qu'il existe  $x \in \text{Vect}((e_j)_{j \in \llbracket 1, i \rrbracket})$  tel que :

$$u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}e_{i+1} + x.$$

En déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  :

$$u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x).$$

- Q 27.** Montrer que :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0$ . En déduire que :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k(e_{i+1}) = 0_{\mathbb{C}^n}$ .

- Q 28.** Montrer alors que :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} T^k = 0_{M_n(\mathbb{C})}$ .

- Q 29.** On ne suppose plus que  $A$  est triangulaire supérieure. Montrer que :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0_{M_n(\mathbb{C})}$ .

### Partie III – Application à la méthode de Gauß-Seidel

Soit  $A = ((a_{i,j})) \in M_n(\mathbb{C})$  telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|.$$

On dit alors que  $A$  est une matrice à **diagonale strictement dominante**. On admet que dans ce cas  $A$  est inversible.

On définit ensuite  $M \in M_n(\mathbb{C})$  et  $F \in M_n(\mathbb{C})$  de la manière suivante : pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,

- si  $i \geq j$ , alors :  $m_{i,j} = a_{i,j}$ , et :  $f_{i,j} = 0$  ;
- si  $i < j$ , alors :  $m_{i,j} = 0$ , et :  $f_{i,j} = -a_{i,j}$ .

Ainsi,  $A = M - F$  où  $F$  est la partie triangulaire supérieure de diagonale nulle de  $-A$  et où  $M$  est la partie triangulaire inférieure de  $A$ .

Soit  $Y \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ . On note  $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$  l'unique matrice colonne telle que :

$$AX = Y.$$

Le but de cette partie est de trouver une suite qui converge vers  $X$ .

**Q 30.** Justifier que  $M$  est inversible.

Dans la suite de cette partie, on pose :  $B = M^{-1}F$ . On définit par récurrence une suite de matrices colonnes  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  avec  $X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{C})$  quelconque et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = BX_k + M^{-1}Y.$$

**Q 31.** Montrer que :  $X = BX + M^{-1}Y$ .

Soit  $\lambda$  une valeur propre quelconque de la matrice  $B$ . On note  $V \in M_{n,1}(\mathbb{C})$  un vecteur propre de  $B$  associé à cette valeur propre.

Par convention, si  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est une suite de nombres complexes alors :  $\sum_{j=n+1}^n u_j = \sum_{j=1}^0 u_j = 0$ .

**Q 32.** Montrer que  $FV = \lambda MV$ . En déduire que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda a_{i,i} v_i = - \left( \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} v_j + \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} v_j \right).$$

**Q 33.** Montrer qu'il existe  $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que :  $|v_{i_0}| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |v_j|$ , et :  $v_{i_0} \neq 0$ . En déduire que :

$$|\lambda a_{i_0, i_0}| \leq \sum_{j=i_0+1}^n |a_{i_0, j}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0, j}|.$$

**Q 34.** En déduire que :  $|\lambda| < 1$ , puis que :  $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = 0_{M_n(\mathbb{C})}$ .

**Q 35.** Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_k - X = B^k(X_0 - X)$$

et conclure.

## FIN