DM 19 pour le 17 mars 2025

Exercice: Calcul d'une intégrale généralisée

On pose pour $x \geq 0$ $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$.

Q 1 *Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.*

Q 2 *Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.*

Q 3 *Montrer que F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et $F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}$.*

Q 4 *Montrer que si $x > 0$, alors $G(x)$ est défini et $G(x) = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x+t)^2} dt$.*

Q 5 *Montrer que l'intégrale $G(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente.*

Q 6 *Déduire de la question 4 que G est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et $G''(x) = \frac{2}{x^3} - \int_0^{+\infty} \frac{6\cos(t)}{(x+t)^4} dt$.*

Q 7 *Montrer que si $x > 0$ alors $G''(x) + G(x) = \frac{1}{x}$.*

Q 8 *Montrer que si $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t(x+t)} dt$ existe et $\left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t(x+t)} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$. En déduire que la fonction G est continue en 0.*

Q 9 *Montrer que F et G ont pour limite 0 en $+\infty$. En déduire que $F = G$.*

Q 10 *Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.*

Exercice:

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on pose $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \cdots & \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$.

Q 11 *.Montrer que la fonction $x \mapsto D_n(x)$ est dérivable et exprimer $D_n'(x)$ sous forme de déterminant.*

Q 12 *Calculer $D_n(x)$.*

Exercice:

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $n \in \mathbb{N}$ et $E = vect\left(P, 1, X, \ldots, X^n\right)$.

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $Q_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant:

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \left|Q(t) - P(t)\right| dt \geq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \left|Q_0(t) - P(t)\right| dt$$

Q 13 *préliminaire: Montrer que* $\forall R \in \mathbb{R}[X]$, *la fonction* $t \mapsto e^{-t^2} R(t)$ *est intégrable sur* $[0, +\infty[$.

Problème analogue plus simple

Dans un premier temps, on s'intéresse au problème suivant (plus simple):

Le but de cette partie est de montrer qu'il existe $Q_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant:

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \left(Q(t) - P(t)\right)^2 dt \geq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \left(Q_0(t) - P(t)\right)^2 dt$$

Q 14 *Introduire un produit scalaire permettant de se ramener à un problème de projection orthogonale.*

Q 15 *Conclure.*

Problème de la distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel normé.

Soit A un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $\|\|$ et B un sous-espace de A.

Q 16 *Soit C un sous-espace supplémentaire de B dans A.*
Justifier que la projection sur C parallèlement à B est un application continue de A dans A.
En déduire que A est une partie fermée de E.

Q 17 *Soit $a \in A$. On note* $\mathcal{B}(0_A, 2\|a\|) = \{x \in A, \|x\| \leq 2\|a\|\}$.

1. *Justifier que $B \cap \mathcal{B}(0_A, 2\|a\|)$ est une partie fermée et bornée de A.*

2. *Montrer qu'il existe $b \in B \cap \mathcal{B}(0_A, 2\|a\|)$ vérifiant:* $\forall x \in B$, $\|b - a\| \leq \|x - a\|$.

(On a donc $\|b - a\| = \min_{x \in B} \|x - a\|$: il existe un point $b \in B$ où le minimum de la distance d'un point de B à a est atteint).

On revient au problème initial:

Q 18 *On pose, pour $R \in E$,* $\|R\| = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} |R(t)|\, dt$. *Justifier que l'on a défini une norme de l'espace vectoriel E.*

Q 19 *Conclure.*

Correction du DM 19

I Exercice: Calcul d'une intégrale généralisée

Posons $f(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$

R 1 *On applique le théorème de continuité des intégrale dépendant d'un paramètre sur $A = [0,+\infty[$.*
Pour la domination, on peut prendre $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

R 2 *On applique la formule de Leibniz avec $A' = [a,+\infty[$ avec $a>0$, et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{-te^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq \varphi(t) = \dfrac{te^{-at}}{1+t^2} = o_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$).*
On a donc F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $F'(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{-te^{-xt}}{1+t^2}dt$.

R 3 *Posons $g(x,t) = \dfrac{-te^{-xt}}{1+t^2}$.*
On applique la formule de Leibniz à F' avec $A' = [a,+\infty[$ avec $a>0$, et $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq \varphi(t) = \dfrac{t^2e^{-at}}{1+t^2} = o_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$).
On a donc F' est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ donc F de classe C^2 et $F''(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}dt$.
On a donc $F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \dfrac{1}{x}$.

R 4 *Soit $x>0$.*
Sous réserve de convergence, On a, par IPP, $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{x+t}dt = \left[-\dfrac{\cos(t)}{x+t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{(x+t)^2}dt$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\cos(t)}{x+t} = 0$ donc $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{x+t}dt = \dfrac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{(x+t)^2}dt$.
Or la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{(x+t)^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$: $\left|\dfrac{\cos(t)}{(x+t)^2}\right| \leq \dfrac{1}{(x+t)^2}$ intégrable sur $[0,+\infty[$. donc les deux intégrales convergent.

R 5 *L'intégrale$\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente (vu en cours).*

R 6 *On a $G(x) = \dfrac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{(x+t)^2}dt$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$. Posons $h(x,t) = \dfrac{\cos(t)}{(x+t)^2}$. On a $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-2\cos(t)}{(x+t)^3}$ et $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{6\cos(t)}{(x+t)^4}$. Si $x \in [a,+\infty[$ avec $a>0$, alors $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. On a $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{2}{(a+t)^3} = \varphi_1(t)$ et $\left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \dfrac{6}{(a+t)^4} = \varphi_2(t)$. Les fonctions φ_1 et φ_2 sont intégrables sur $[0,+\infty[$ donc G est de classe C^2 sur $[a,+\infty[$ donc sur $]0,+\infty[$ et $G''(x) = \dfrac{2}{x^3} - \int_0^{+\infty} \dfrac{6\cos(t)}{(x+t)^4}dt$.*

R 7 *Par IPP successives justifiées par le fait que les crochets ont des limites finies, pour $x>0$ fixé,* $G''(x) = \frac{2}{x^3} - \int_0^{+\infty} \frac{6\cos(t)}{(x+t)^4}dt = \frac{2}{x^3} + \left[\frac{2\cos(t)}{(x+t)^3}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\sin(t)}{(x+t)^3}dt = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin(t)}{(x+t)^3}dt = \left[\frac{\sin(t)}{(x+t)^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}dt = -G(x) + \frac{1}{x}$.

R 8 *Soit $x>0$ fixé. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t(x+t)}$ est prolongeable par continuité en 0 et intégrable sur $[1,+\infty[$. On a* $\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t(x+t)}dt\right| \leq \left|\int_0^{1} \frac{\sin(t)}{t(x+t)}dt\right| + \left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t(x+t)}dt\right| \leq \int_0^{1} \left|\frac{\sin(t)}{t(x+t)}\right| dt + \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t(x+t)}\right| dt$. *En utilisant l'inégalité $|\sin(t)| \leq |t|$ dans la première intégrale et $|\sin(t)| \leq 1$ dans la deuxième, on obtient* $\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t(x+t)}dt\right| \leq \int_0^1 \frac{1}{x+t}dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+x)}dt \leq \int_0^1 \frac{1}{x+t}dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ *car* $\frac{1}{t(t+x)} \leq \frac{1}{t^2}$. *On a* $G(x) - G(0) = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin(t)}{t(x+t)}dt$ *donc* $|G(x) - G(0)| \leq x\left(\int_0^1 \frac{1}{x+t}dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt\right) = x(\ln(1+x) - \ln(x)) + 1) \rightarrow_{x\to 0^+} 0$ *(C.C). On en déduit que G est continue en 0.*

R 9 *On a* $0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$ *et*
$|G(x)| \leq \left|\frac{1}{x}\right| + \left|\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}dt\right| \leq \frac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \left|\frac{\cos(t)}{(x+t)^2}\right| dt \leq \frac{1}{x} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t)^2}dt = \frac{2}{x}$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0$. –
La fonction définie par $H(x) = F(x) - G(x)$ vérifie l'équation $H'' + H = 0$ sur $]0,+\infty[$ donc
$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $\forall x,\ H(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$
Or $H(2n\pi) = A$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 0$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} H(2n\pi) = 0$ *donc $A = 0$ et de même* $\lim\limits_{n\to+\infty} H\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = B = 0$ *donc $H = 0$.*

R 10 *On sait que F et G sont continues en 0 donc* $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = F(0)$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = G(0)$ *donc* $F(0) = G(0)$ *donc* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice:

R 11 *Les fonction $x \mapsto \frac{x^i}{i!}$ sont dérivables donc $x \mapsto D_n(x)$ est dérivable.*

De plus, on a $C_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{x^2}{2!} \\ \frac{x^3}{3!} \\ \vdots \\ \frac{x^n}{n!} \end{pmatrix}$ *de dérivée* $C_1'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \frac{x^2}{2!} \\ \vdots \\ \frac{x^n}{n!} \end{pmatrix} = C_1(x)$.

et pour $2 \leq j \leq n-1$, $C_j(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ x \\ \frac{x^2}{2!} \\ \vdots \\ \frac{x^{n-j+1}}{(n-j+1)!} \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ *ligne* $(j-1)$ *donc* $C_j'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ x \\ \vdots \\ \frac{x^{n-j}}{n!} \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ *ligne j* *donc* $C_j'(x) = C_{j+1}(x)$.

On a $D'_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \det\left(C_1(x)|\cdots|C_{j-1}(x)|C'_j(x)|C_{j+1}(x)|\cdots|C_n(x)|\right)$ *(cas particulier le la dérivée d'une application n linéaire)*
Pour $j \in [[1, n-1]]$, *le déterminant à deux colonnes identiques donc est nul.*

On en déduit que $D'_n(x) = \det\left(C_1(x)|\cdots|C_{n-1}(x)||C'_n(x)|\right) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & & & \frac{x^2}{2!} & x & 0 \\ \frac{x^n}{n!} & \cdots & & \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & 1 \end{vmatrix}$ *et, par développement par rapport à la dernière colonne,* $D'_n(x) = D_{n-1}(x)$.

R 12 *On a* $D_1(x) = x$ *et pour* $k \in [[1, n]]$, $D_k(0) = 0$ *car* $C_1(0) = 0_{n,1}$ *donc, par intégrations successives,* $D_2(x) = \frac{x^2}{2}$, $D_2(x) = \frac{x^3}{3!}, \ldots, D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

Exercice:

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $n \in \mathbb{N}$ et $E = vect(P, 1, X, \ldots, X^n)$.

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $Q_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant:

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^{+\infty} e^{-t^2} |Q(t) - P(t)|\, dt \geq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} |Q_0(t) - P(t)|\, dt$$

R 13 *Il existe* $d \in \mathbb{N}$ *tel que* $R(t) = O_{t\to+\infty}(t^d)$ *donc* $R(t)e^{-t^2} = O_{t\to+\infty}\left(t^d e^{-t^2}\right)$ *et* $t^{d+2}e^{-t^2} \to_{t\to+\infty} 0$ *donc* $t^d e^{-t^2} = O_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ *donc* $t \mapsto e^{-t^2}R(t)$ *est intégrable sur* $[0, +\infty[$.

Problème analogue plus simple

Dans un premier temps, on s'intéresse au problème suivant (plus simple):

Le but de cette partie est de montrer qu'il existe $Q_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant:

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^{+\infty} e^{-t^2} (Q(t) - P(t))^2\, dt \geq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} (Q_0(t) - P(t))^2\, dt$$

R 14 *On pose pour* $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $(P|Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} P(t) Q(t)\, dt$. *On montrer que cela définit un produit scalaire* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} (Q(t) - P(t))^2\, dt$ *(utiliser le théorème de l'intégrale nulle pour le caractère défini positif).*

R 15 *La condition* $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^{+\infty} e^{-t^2} (Q(t) - P(t))^2\, dt \geq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} (Q_0(t) - P(t))^2\, dt$ *équivaut à* $\|Q - P\|^2 \geq \|Q_0 - P\|^2$.
On cherche donc à montrer l'existence de $Q_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ *vérifiant:* $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\|Q - P\|^2 \geq \|Q_0 - P\|^2$, *ce qui est établi par le cours avec* Q_0 *projeté orthogonal de* P *sur* $\mathbb{R}_n[X]$.

Problème de la distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace vectoriel normé.

Soit A un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $\|\|$ et B un sous-espace de A.

R 16 *On a* $A = B \oplus C$. *La projection* p *sur* C *parallèlement à* B *est un application linéaire et* A *est de dimension finie donc* p *est continue.*
Soit (x_n) *une suite de* B *qui converge vers* x.
On a $x_n \in B$ *donc* $p(x_n) = 0$ *et, par continuité de* p, $\lim_{n \to +\infty} p(x_n) = p(x)$ *donc* $p(x) = 0$ *donc* $x \in B$ *donc* B *est une partie fermée de* A.

R 17 *Soit* $a \in A$. *On note* $\mathcal{B}(0_A, 2\|a\|) = \{x \in A, \|x\| \leq 2\|a\|\}$.

1. $\mathcal{B}(0_A, 2\|a\|)$ *est une partie fermée (vu en cours) donc* $B \cap \mathcal{B}(0_A, 2\|a\|)$ *est l'intersection de deux parties fermées donc est une partie fermée de* A.
   $\mathcal{B}(0_A, 2\|a\|)$ *est bornée par définition donc* $B \cap \mathcal{B}(0_A, 2\|a\|)$ *est bornée.*

2. *L'application* $\varphi : \left\{ \begin{array}{c} B \cap \mathcal{B}(0_A, 2\|a\|) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x - a\| \end{array} \right.$ *est continue et est définie sur une partie fermée et bornée de l'espace vectoriel de dimension finie* A.
   Elle est donc bornée et atteint ses bornes. Elle admet donc un minimum:
   il existe $b \in B \cap \mathcal{B}(0_A, 2\|a\|)$ *vérifiant:* $\forall x \in B \cap \mathcal{B}(0_A, 2\|a\|)$, $\|b - a\| \leq \|x - a\|$.
   Supposons $x \in B \backslash \mathcal{B}(0_A, 2\|a\|)$.
   On a alors $\|x - a\| \geq |\|x\| - \|a\|| > 2\|a\| - \|a\| = \|a\| = \|0 - a\| = \varphi(0) \geq \varphi(b)$ *car* $0 \in B \cap \mathcal{B}(0_A, 2\|a\|)$.

R 18 *On vérifie que* $\|R\| = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} |R(t)|\, dt$ *est une norme de l'espace vectoriel* E *((utiliser ici aussi le théorème de l'intégrale nulle).*

R 19 *D'après la quesiton 2 aplliqué à* $B = \mathbb{R}_n[X]$ *qui est bien de dimension finie, il existe* $Q_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ *vérifiant:* $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\|Q - P\| \geq \|Q_0 - P\|$ *c'est-à-dire*

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^{+\infty} e^{-t^2} |Q(t) - P(t)|\, dt \geq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} |Q_0(t) - P(t)|\, dt$$