# DM 20 exercices supplémentaires de calcul différentiel

**Exercice 1** *Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on pose $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.*

1. *Montrer que $f$ admet un prolongement par continuité ('noté encore $f$ dans la suite de l'exercice).*
2. *Montrer que l'application $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.*
3. *Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et calculer sa valeur.*
   *En utilisant le théorème de Schwarz, montrer que $f$ n'est pas de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$.*

**Exercice 2** *Soit* $f \left\{ \begin{array}{c} ]0,+\infty[^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \end{array} \right.$

1. *Etudier l'existence d'un maximum global de $f$.*
2. *Justifier que $]0,+\infty[^2$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.*
3. *Etudier l'existence d'un d'extremum local de $f$.*
4. *On pose $R = \left\{ (x,y) \in ]0,+\infty[^2, \dfrac{1}{3} \leq x \leq 9 \text{ et } \dfrac{1}{3} \leq y \leq 9 \right\}$.*
   *Montrer que si $(x,y) \notin R$ alors $f(x,y) > f(1,1)$.*
   *Montrer que $f$ admet un minimum global.*

**Exercice 3** *Formule de Fubini (plus compliqué)*
*Soit $a,b,c,d$ des réels vérifiant $a < b$ et $c < d$ et $f : [a,b] \times [c,d] \mapsto R$ une fonction continue.*
*On souhaite montrer que $\int_a^b \left( \int_c^d f(u,v)\,dv \right) du = \int_c^d \left( \int_a^b f(u,v)\,du \right) dv$.*
*Pour $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$, on pose $F(x,y) = \int_a^x \left( \int_c^y f(u,v)\,dv \right) du$ et $G(x,y) = \int_c^y \left( \int_a^x f(u,v)\,du \right) dv$.*

1. *Etude de $\dfrac{\partial F}{\partial x}$.*
   (a) *Soit $y \in [c,d]$. Justifier que $u \mapsto \int_c^y f(u,v)\,dv$ est définie et continue sur $[a,b]$. En déduire que $F$ est définie sur $[a,b] \times [c,d]$.*
   (b) *En déduire que $F$ admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ et donner une expression de $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ à l'aide de $f$ pour $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$.*
2. *Etude de $\dfrac{\partial G}{\partial x}$*
   (a) *Justifier que la fonction $h : (x,v) \mapsto \int_a^x f(u,v)\,du$ est définie sur $[a,b] \times [c,d]$.*
   (b) *Soit $x \in [a,b]$. Montrer que $v \mapsto h(x,v)$ est continue sur $[c,d]$.*
   (c) *Soit $v \in [c,d]$. Montrer que $x \mapsto h(x,v)$ est de classe $C^1$ sur $[a,b]$.*
   (d) *En déduire que $G$ admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ et donner une expression de $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,y)$ à l'aide de $f$ pour $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$.*
3. *En déduire que $F = G$.*

# Solution de l'exercice 1:

1. $|f(x,y)-0| \leq |xy| \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |xy| \rightarrow_{(x,y)\rightarrow(0,0)} 0$ donc $\lim\limits_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f(x,y) = 0$.

   Dans la suite, on note $f : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \left\{ \begin{array}{c} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array} \right.$

2. Sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$
   Par opération sur fonctions de classe $C^1$ la fonction $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et si $(x,y) \neq (0,0)$
   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y}{(x^2+y^2)^2}\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x}{(x^2+y^2)^2}\left(-x^4+4x^2y^2+y^4\right)$
   Dérivées partielles en $(0,0)$:
   Posons $\varphi_1(x) = f(x,0)$.
   On a $\dfrac{\varphi_1(x)-\varphi_1(0)}{x-0} = 0 \rightarrow_{x\rightarrow 0} 0$ donc $\varphi_1$ est dérivable en 0 et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \varphi_1'(0) = 0$
   On obtient de même que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
   Continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$:
   et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \dfrac{|y|\left|x^4+4x^2y^2-y^4\right|}{(x^2+y^2)^2} \leq |y| \dfrac{x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} = |y| \rightarrow_{(x,y)\rightarrow(0,0)} 0$
   On a donc $\lim\limits_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est donc continue en $(0,0)$.
   De même $\lim\limits_{(x,y)\rightarrow(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
   On en déduit que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3. Par opération sur fonctions de classe $C^1$ les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ donc $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
   Existence et calcul de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}(0,0)$:
   Posons $u(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. On a $\dfrac{u(0,y)-u(0,0)}{y} = \dfrac{-y}{y} \rightarrow_{y\rightarrow 0} -1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
   Existence et calcul de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$:
   Posons $v(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. On a $\dfrac{v(x,0)-v(0,0)}{x} = \dfrac{x}{x} \rightarrow_{y\rightarrow 0} 1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$
   On a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ donc, d'après le théorème de Schwarz, la fonction $f$ n'est pas de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Solution:

1. Etude de $\dfrac{\partial F}{\partial x}$.

   (a) Soit $u \in [a,b]$. $\varphi_u : v \mapsto f(u,v)$ est continue sur $[c,d]$ donc sur $[c,y]$ donc $\int_c^y \varphi_u(v)\,dv$ existe.
   Posons $k(u,y) = \int_c^y \varphi_u(v)\,dv = \int_c^y f(u,v)\,dv$

Soit $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$.
Pour montrer que $F(x,y) = \int_a^x k(u,y)\,du$ existe, montrons que la fonction $u \mapsto k(u,y)$ continue sur $[a,b]$ (qui entraîne la continuité sur $[a,x]$) ce qui revient à montrer que $u \mapsto \int_c^y f(u,v)\,dv$ est continue. Le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre s'applique sur $[c,y]$ (domination par une constante en appliquant le th des bornes atteintes à $f$ sur $[a,b] \times [c,d]$.

(b) Soit $y \in [c,d]$. La fonction $x \mapsto \int_a^x k(u,y)\,du = F(x,y)$ est une primitive de la fonction continue $u \mapsto k(u,y)$ donc elle est de classe $C^1$ et de dérivée $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = k(x,y) = \int_c^y f(x,v)\,dv$.

2. Etude de $\dfrac{\partial G}{\partial x}$.

   (a) Soit $(x,v) \in [a,b] \times [c,d]$.
   On a $u \mapsto f(u,v)$ est continue sur $[a,b]$ donc sur $[a,x]$ car $f$ est continue donc $h(x,v) = \int_a^x f(u,v)\,du$ est existe.

   (b) Soit $x \in [a,b]$.
   le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre avec $(u,v) \mapsto f(u,v)$ et $I = [0,x]$ s'applique (domination par une constante en vertu du th des bornes atteintes).
   On a donc $v \mapsto h(x,v) = \int_a^x f(u,v)\,du$ est continue sur $[c,d]$.

   (c) Soit $v \in [c,d]$. La fonction $x \mapsto h(x,v) = \int_a^x f(u,v)\,du$ est une primitive de la fonction continue $x \mapsto f(x,v)$ donc est de classe $C^1$ sur $[a,b]$ et de dérivée $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,v) = f(x,v)$.

   (d) On a $G(x,y) = \int_c^y \left(\int_a^x f(u,v)\,du\right) dv = \int_c^y h(x,v)\,dv$.
   Fixons $y \in [c,d]$ et appliquons le théorème de dérivation sous le signe $\int$ sur $[c,y]$:
   $(H_2') : \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,v)$ existe et vaut $f(x,v)$.
   $(H_5')$ : On peut toujours majorer $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,v)\right|$ par une constante.
   On en déduit que $x \mapsto \int_c^y h(x,v)\,dv$ est de classe $C^1$ et de dérivée $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \int_c^y \dfrac{\partial h(x,v)}{\partial x} dv. \int_c^y f(x,v)\,dv$.

3. La fonction $H = G - F$ est définie sur $[a,b] \times [c,d]$ et admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial H}{\partial x} = \dfrac{\partial G}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$.
   On en déduit qu'il existe une fonction $w : [c,d] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in [a,b] \times [c,d]$, $H(x,y) = w(y)$.
   Or $G(0,y) = 0$ et $F(0,y) = 0$ donc $H(0,y) = w(y) = 0$ donc $F = G$. On a donc $F(c,d) = G(c,d)$ (formule de Fubini)

4.

# Solution de l'exercice 2:

1. $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ donc $f(x,1) = x + \frac{1}{x} + 1 \to_{x \to +\infty} +\infty$ donc $f$ n'est pas majorée donc n'admet pas de maximum.

2. Soit $O_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ et $O_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$.
   On a $]0,+\infty[^2 = O_1 \cap O_2$ et posons $f_1 : (x,y) \mapsto x$.
   $O_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f_1(x,y) > 0\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ car $f_1$ est continue.
   De même $O_2$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ donc $]0,+\infty[^2$est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

3. La fonction $f$ est de classe $C^1$ et $]0,+\infty[^2$est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ donc un extremum local ne peut être atteint qu'en un point critique.
   Points critiques:$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial u}(x,y) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x^2}$ et $x = \dfrac{1}{y^2} \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x^2}$ et $x = x^4$.

Or $x^4 - x = x(x^3-1) = x(x-1)(1+x+x^2)$ s'annule exactement pour $x=0$ et $x=1$.
Si $x=0$, alors $(x,y) \notin ]0,+\infty[^2$ donc l'unique point critique est $(1,1)$.
Etude du point critique avec la Hessienne:
On obtient $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{2}{y^3} \end{pmatrix}$ donc $S = H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
On a $\det(S) = 3 > 0$ donc les deux valeurs propres réelles de la matrice symétrique réelle $S$ sont de même signe (et non nulles).
et $tr(S) = 4 > 0$ donc les deux valeurs propres de $S$ sont strictement positives donc $f$ admet un minimum local et $(1,1)$ de valeur $f(1,1) = 3$.

4. On pose $R = \left\{(x,y) \in ]0,+\infty[^2, \frac{1}{3} \leq x \leq 9 \text{ et } \frac{1}{3} \leq y \leq 9\right\}$ et $R' = \left\{(x,y) \in ]0,+\infty[^2, \frac{1}{3} < x < 9 \text{ et } \frac{1}{3} < y < 9\right.$
$(x,y) \notin R' \Leftrightarrow \left(x < \frac{1}{3} \text{ ou } x > 9 \text{ ou } y < \frac{1}{3} \text{ ou } y > 9\right)$.
Soit $(x,y) \in ]0,+\infty[^2$ tel que $(x,y) \notin R$.
Si $x < \frac{1}{3}$ alors $f(x,y) \geq \frac{1}{x} > 3$ donc $f(x,y) > f(1,1)$.
Si $y < \frac{1}{3}$ alors $f(x,y) \geq \frac{1}{y} > 3$ donc $f(x,y) > f(1,1)$
Sinon $x \geq \frac{1}{3}$ et $y \geq \frac{1}{3}$.
Si $x > 9$ alors $f(x,y) \geq xy > 9 \times \frac{1}{3} = 3$ donc $f(x,y) > f(1,1)$
Si $y \geq 9$ alors $f(x,y) \geq xy > 3$ donc $f(x,y) > f(1,1)$.
Conclusion:
On montrer que $R$ est une partie fermée et $R'$ une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
La fonction $f$ est continue sur $R$ qui est fermée et bornée donc
il existe $(x_0,y_0) \in R, \forall (x,y) \in R,\ f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$.
D'après ce qui précède, si $(x,y) \notin R$ alors $f(x,y) \geq f(1,1) \geq f(x_0,y_0)$ car $(1,1) \in R$.
On en déduit que $\forall (x,y) \in ]0,+\infty[^2$, $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$ donc $f$ admet un minimum global donc local en $(x_0,y_0)$ donc $(x_0,y_0) = (1,1)$.
On en déduit que $f(1,1)$ est minimum (global) de $f$.

## Solution de l'exercice 3:

1. Etude de $\frac{\partial F}{\partial x}$.

   (a) Soit $u \in [a,b]$. $\varphi_u : v \mapsto f(u,v)$ est continue sur $[c,d]$ donc sur $[c,y]$ donc $\int_c^y \varphi_u(v)\,dv$ existe.
   Posons $k(u,y) = \int_c^y \varphi_u(v)\,dv = \int_c^y f(u,v)\,dv$.
   Soit $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$.
   Pour montrer que $F(x,y) = \int_a^x k(u,y)\,du$ existe, montrons que la fonction $u \mapsto k(u,y)$ continue sur $[a,b]$ (qui entraîne la continuité sur $[a,x]$) ce qui revient à montrer que $u \mapsto \int_c^y f(u,v)\,dv$ est continue.
   Le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramêtre s'applique sur $[c,y]$ (domination par une constante en appliquant le th des bornes atteintes à $f$ sur $[a,b] \times [c,d]$.

   (b) Soit $y \in [c,d]$. La fonction $x \mapsto \int_a^x k(u,y)\,du = F(x,y)$ est une primitive de la fonction continue $u \mapsto k(u,y)$ donc elle est de classe $C^1$ et de dérivée $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = k(x,y) = \int_c^y f(x,v)\,dv$.

2. Etude de $\frac{\partial G}{\partial x}$.

(a) Soit $(x,v) \in [a,b] \times [c,d]$.
On a $u \mapsto f(u,v)$ est continue sur $[a,b]$ donc sur $[a,x]$ car $f$ est continue donc $h(x,v) = \int_a^x f(u,v)\,du$ est existe.

(b) Soit $x \in [a,b]$.
le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre avec $(u,v) \mapsto f(u,v)$ et $I = [0,x]$ s'applique (domination par une constante en vertu du th des bornes atteintes).
On a donc $v \mapsto h(x,v) = \int_a^x f(u,v)\,du$ est continue sur $[c,d]$.

(c) Soit $v \in [c,d]$. La fonction $x \mapsto h(x,v) = \int_a^x f(u,v)\,du$ est une primitive de la fonction continue $x \mapsto f(x,v)$ donc est de classe $C^1$ sur $[a,b]$ et de dérivée $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,v) = f(x,v)$.

(d) On a $G(x,y) = \int_c^y \left(\int_a^x f(u,v)\,du\right) dv = \int_c^y h(x,v)\,dv$.
Fixons $y \in [c,d]$ et appliquons le théorème de dérivation sous le signe $\int$ sur $[c,y]$:
$(H_2')$ : $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,v)$ existe et vaut $f(x,v)$.
$(H_5')$ : On peut toujours majorer $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,v)\right|$ par une constante.
On en déduit que $x \mapsto \int_c^y h(x,v)\,dv$ est de classe $C^1$ et de dérivée $\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \int_c^y \dfrac{\partial h(x,v)}{\partial x} dv.\ \int_c^y f(x,v)\,dv$.

3. La fonction $H = G - F$ est définie sur $[a,b] \times [c,d]$ et admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial H}{\partial x} = \dfrac{\partial G}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$.
On en déduit qu'il existe une fonction $w : [c,d] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in [a,b] \times [c,d]$, $H(x,y) = w(y)$.
Or $G(0,y) = 0$ et $F(0,y) = 0$ donc $H(0,y) = w(y) = 0$ donc $F = G$. On a donc $F(c,d) = G(c,d)$ (formule de Fubini)